

Erweiterungen ausgearteter Kontrollprobleme

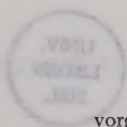
Hellmut Weber

—

1975

Erweiterungen ausgearteter Kontrollprobleme

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
des Fachbereichs Mathematik
an der Ludwig-Maximilians-Universität
München



vorgelegt von
Hellmut Weber
aus Innsbruck

München, Juni 1975

1. Berichterstatter: Professor K.-H. Hoffmann

2. Berichterstatter: Professor G. Hämmerlin

Tag der mündlichen Prüfung: 25. Juli 1975



Inhalt

Einleitung	1
------------	---

Bezeichnungen und Definitionen	12
--------------------------------	----

1. Kapitel: Relaxed Control Probleme

§ 1 Formulierung der Probleme (RP.W) und (RP.T)	14
---	----

§ 2 Untersuchung des Integranden von (RP.T)	22
---	----

§ 3 Stetigkeits- und Meßbarkeitsaussagen für gewisse Korrespondenzen	39
---	----

§ 4 Ein Selektionssatz; Äquivalenz von (RP.W) und (RP.T)	50
---	----

2. Kapitel: Richtungsableitung von Max-Funktionen

§ 1 "Linearisierung" von Korrespondenzen	54
--	----

§ 2 Richtungsableitung von Max-Funktionen	63
---	----

3. Kapitel: Ein Maximumprinzip für (RP.T)

§ 1	Richtungsableitung des Integranden von (RP.T)	65
§ 2	Richtungsableitung des Zielfunktional von (RP.T)	74
§ 3	Herleitung eines Maximumprinzips	82

Literatur	92
-----------	----

Einleitung

Viele Probleme der Wirtschaft und Technik, wie etwa die Bestimmung einer optimalen Investitionspolitik, der Entwurf optimaler Trassenführung von Straßen, die Maximierung des Endproduktes einer chemischen Reaktion oder die "weiche" Mondlandung lassen sich mathematisch als Kontrollprobleme formulieren (vgl. etwa BERKOVITZ [1974], CITRON [1969], LEE - MARKUS [1967]). Dabei wird ein dynamisches System betrachtet, dessen Zustand, charakterisiert durch die Phasenfunktion, beschrieben wird durch ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen mit gewissen Anfangs- oder Randbedingungen. Die rechte Seite der Differentialgleichung hängt von einer regelbaren Funktion ab, - der sogenannten Kontrollfunktion - , deren Wertebereich aus technischen oder physikalischen Gründen im allgemeinen gewissen Einschränkungen unterliegt. Die Aufgabe besteht nun darin, eine Kontrollfunktion optimal zu wählen, optimal in dem Sinn, daß eine geeignete Kosten- oder Gewinnfunktion ein Extremum annimmt. Die mathematische Formulierung eines derartigen Kontrollproblems führt etwa zu der folgenden Aufgabe:

Minimiere das Funktional

$$\int_{t_0}^{t_1} g(t, x(t), u(t)) dt$$

unter den Bedingungen

$$\dot{x}(t) = G(t, x(t), u(t)) \quad \text{f.Ü.,}$$

$$h_0(t_0, x(t_0)) = 0, \quad h_1(t_1, x(t_1)) = 0,$$

$$u(t) \in U_0 \subset \mathbb{R}^r \quad \text{f.Ü.}$$

$$(g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}, \quad G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$h_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{s_i}, \quad i = 0, 1).$$

Dabei heißen die Funktionen $u(t)$ bzw. $x(t)$ die Kontrollfunktionen (Kontrollen) bzw. die Phasenfunktionen (Trajektorien). Der Raum $\mathbb{R}^n \ni x$ wird als Phasenraum, die Menge U_0 als Kontrollbereich bezeichnet.

Das entscheidende Charakteristikum von Kontrollproblemen ist das Auftreten der in den meisten Beispielen abgeschlossenen, im allgemeinen jedenfalls nicht offenen Menge U_0 , in der die Bilder der Kontrollfunktionen enthalten sein müssen. Deshalb kann man die aus der Analysis oder der Variationsrechnung bekannten Kriterien auf diese Problemklasse nicht ohne Weiteres übertragen. Eine der wichtigsten notwendigen Bedingungen für die Lösungen derartiger Probleme ist das "Maximumprinzip", das von der Gruppe um PONTRJAGIN zu Beginn der Fünfziger Jahre gefunden wurde. Bei der Formulierung des Maximumprinzips übernimmt die folgende "Hamiltonfunktion"

$$H(t, x, u, p, \lambda) := (p, G(t, x, u)) - \lambda g(t, x, u),$$

$$H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

die Rolle der klassischen Hamiltonfunktion im Satz von Lagrange.

Maximumprinzip von PONTRJAGIN

Sei $(x^*(t), u^*(t))$ eine Lösung des obigen Kontrollproblems auf dem Intervall $[t_0^*, t_1^*]$. Dann existieren $\lambda_0 \in \mathbb{R}^+$, $l_0 \in \mathbb{R}^{s_0}$, $l_1 \in \mathbb{R}^{s_1}$, $p \in W_1^n[t_0^*, t_1^*]$ (nicht alle gleichzeitig Null), die den folgenden Bedingungen genügen:

$$(a) \quad \dot{p}(t) = -D_x H = -D_x G(t, x^*(t), u^*(t))^T p(t)$$

$$+ \lambda_0 D_x g(t, x^*(t), u^*(t)),$$

(adjungierte Gleichung)

$$p(t_0^*) = D_x h_0(t_0^*, x^*(t_0^*))^T l_0,$$

$$p(t_1^*) = -D_x h_1(t_1^*, x^*(t_1^*))^T l_1,$$

(Transversalitätsbedingungen)

(b) für fast alle $t \in [t_0^*, t_1^*]$ gilt:

$$H(t, x^*(t), u^*(t), p(t), \lambda_0) = \max_{u \in U_0} H(t, x^*(t), u, p(t), \lambda_0)$$

$$=: \Phi(t, x^*(t), p(t), \lambda_0),$$

(Maximumbedingung)

(c) die Funktion $\Phi(t, x^*(t), p(t), \lambda_0)$ ist stetig auf dem Intervall $[t_0^*, t_1^*]$ und es gilt:

$$\Phi(t_0^*, x^*(t_0^*), p(t_0^*), \lambda_0) = -(D_t h_0(t_0^*, x^*(t_0^*)), l_0),$$

$$\Phi(t_1^*, x^*(t_1^*), p(t_1^*), \lambda_0) = (D_t h_1(t_1^*, x^*(t_1^*)), l_1),$$

$$\Phi(t, x^*(t), p(t), \lambda_0) =$$

$$= (h_1(t_1^*, x^*(t_1^*)), l_1) + \int_t^{t_1^*} D_t H(s, x^*(s), u^*(s), p(s), \lambda_0) ds.$$

Die praktische Bedeutung des Maximumprinzips liegt darin, daß jede Lösung $(x^*(t), u^*(t))$ des gegebenen Kontrollproblems (zusammen mit der adjungierten Funktion $p(t)$) diejenige Randwertaufgabe lösen muß, die man aus der Differentialgleichung

des Kontrollproblems und der adjungierten Gleichung, zusammen mit den Randbedingungen des Kontrollproblems und den Transversalitätsbedingungen, unter Verwendung der Maximumbedingung erhält. Dadurch ist es in manchen wichtigen Fällen möglich, die Lösung analytisch anzugeben. Zumindest kann man aus den vom Maximumprinzip gelieferten Bedingungen mit geeigneten Verfahren (Multiple - Shooting nach BULIRSCH [1971], Quasilinearisierung nach MIELE - IYER [1970], Min-H-Methode nach KRYLOV - CERNUSKO [1972]) in vielen Fällen eine Lösung numerisch bestimmen.

Während das Maximumprinzip unter schwachen Voraussetzungen gilt, kann man die Existenzfrage nur unter viel stärkeren Bedingungen positiv beantworten. Zum Beispiel existiert für das folgende Kontrollproblem keine optimale Kontrolle:

Minimiere das Funktional

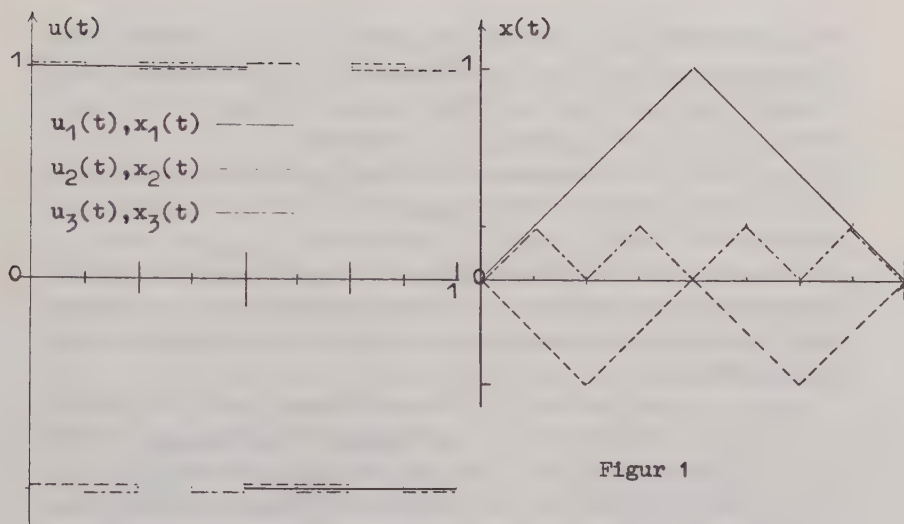
$$\int_0^1 x^2(t) dt$$

unter den Bedingungen

$$\dot{x}(t) = u(t) \quad \text{f.ü.}, \quad x(0) = 0,$$

$$|u(t)| = 1 \quad \text{f.ü.} \quad .$$

Hier liefert jede zulässige Steuerung einen echt positiven Wert des Zielfunktional. Das Infimum des Zielfunktional ist die Null (vgl. Figur 1). Jedoch gibt es zu der entsprechenden Funktion $\overset{\circ}{x}(t) \equiv 0$ keine zulässige Steuerung. Eine solche Kurve, die einerseits den Minimalwert des Zielfunktional liefert, andererseits aber nicht Trajektorie zu einer zulässigen Steuerung ist, sondern nur als Grenzwert solcher Trajektorien erhalten werden kann, nennt man "Sliding Regime".



Figur 1

Daß dieses abnorm erscheinende Verhalten nicht nur bei so konstruierten Beispielen auftritt, zeigt die folgende, von KROTOV[1961] behandelte Aufgabe aus der Flugtechnik:

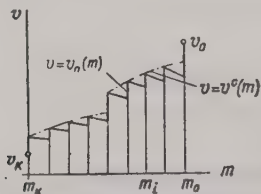
Die Bewegungsgleichungen eines Flugzeuges (aufgefaßt als Massenpunkt) bei horizontalem, geradlinigem Flug lauten:

$$m\dot{v} - P(H, v, b) + X(H, v, Y) = 0,$$

$$Y = mg, \quad b = -\dot{m}, \quad \dot{x} = v.$$

Dabei sind: m - die Masse des Flugzeuges, g - die Gravitationsbeschleunigung, x - die horizontale Koordinate des Flugzeuges, v - die Geschwindigkeit, H - die Höhe des horizontalen Fluges, X - der Stirnwiderstand, Y - die Auftriebskraft, P - die Schubkraft, b - der Massendurchsatz.

Die Kontrollaufgabe besteht nun darin, unter gegebenen Randbedingungen, - zu Beginn des Fluges ($x(t_0) = 0$, $m(t_0) = m_0$, $v(t_0) = v_0$) und zur ebenfals zu ermittelnden Endzeit des Fluges t_e ($m(t_e) = m_e$) -, Funktionen $x(t)$, $v(t)$, $m(t)$, $b(t)$, $Y(t)$ so zu bestimmen, daß der zurückgelegte Flugweg $x(t_e)$ maximal ist. KROTOV zeigt nun, daß eine Flugbahn $x^0(t)$ maximaler Weite existiert, die einerseits nirgends differenzierbar ist, sich andererseits beliebig gut approximieren läßt durch Bahnen $x^n(t)$, die Trajektorien sind zu zulässigen Steuerungen mit einer unbeschränkt wachsenden Anzahl von Schaltpunkten.



Diese aus der Arbeit von KROTOV entnommene Figur 2 zeigt für die entsprechenden Steuerungen die Geschwindigkeiten $v^0(t)$ bzw. $v^n(t)$ in Abhängigkeit von der Masse.

Wenn man hinreichend komplizierte Vorgänge, - wie etwa die Erreichung der Fluchtgeschwindigkeit bei minimalem Brennstoffverbrauch, den Übergang zwischen verschiedenen Orbitalbahnen eines Satelliten bei minimalem Brennstoffverbrauch oder die plastische Deformation von Metallen bei minimalem Energieverbrauch -, gut beschreiben will, ist dieses abnorme Verhalten der entsprechenden Kontrollprobleme die Regel (vgl. etwa KROTOV - GURMAN [1973] oder KROTOV - BROVMAN [1962]).

Bei diesen Beispielen sind die in den üblichen Existenzsätzen benutzten Konvexitätsvoraussetzungen (vgl. etwa BERKOVITZ [1974], CESARI [1965], FILIPPOV [1962] und [1971]) nicht erfüllt. Um auch solche Aufgaben behandeln zu können, werden in den Arbeiten von WARGA [1972] und IOFFE - TICHOMIROV [1968], ausgehend von einem Kontrollproblem, für das keine optimale Kontrolle im gewöhnlichen Sinne zu existieren braucht, neue

daraus abgeleitete, sogenannte "Relaxed Control" Probleme konstruiert, die den gleichen Minimalwert des Zielfunktionalis liefern wie das Ausgangsproblem. Für diese Relaxed Control Probleme existieren optimale Kontrollen, die sich in einem geeigneten Raum gerade als Grenzfunktionen von Folgen zulässiger Kontrollen des Ausgangsproblems erweisen.

WARGA erhält, - allerdings nur für endlich-dimensionalen Phasenraum - , durch Einbettung der Punktfunktionale in eine geeignete Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen ein Kontrollproblem, für das die Kontrollfunktionen des Ausgangsproblems zulässig bleiben. Unter intensiver Verwendung wesentlicher Sätze der Funktionalanalysis und der Maßtheorie zeigt er, daß der Abschluß der Menge der eingebetteten ursprünglichen Kontrollfunktionen konvex und in einer geeigneten Topologie folgenkompakt ist. Daraus kann er Existenzaussagen und notwendige Bedingungen ableiten.

IOFFE - TICHOMIROV benutzen einen Zugang über die Theorie der konvexen Funktionen. Sie konstruieren ein Kontrollproblem, dessen Integrand konvex ist bezüglich der Kontrollfunktion und dessen Differentialgleichung nur die Kontrollfunktion, und diese sogar linear enthält. Bei dieser Konvexifizierung ist die Information über die Differentialgleichung des Ausgangsproblems im wesentlichen in dem neuen Integranden enthalten. Unter Verwendung der Theorie der analytischen Mengen und Funktionen (vgl. KURATOWSKI [1966]) und des Satzes von LJAPUNOV (vgl. LJAPUNOV [1940], WEGMANN [1970]) erhalten sie für die stetige Konvolution einer Familie von konvexen Funktionen (vgl. IOFFE - TICHOMIROV [1968]) eine Konvexitätsaussage, die Grundlage ihrer Existenzaussagen ist. Dieses Konvexitätsergebnis ist deshalb überraschend, weil die analoge Aussage für die bei MOREAU [1966/67] betrachtete diskrete Konvolution nicht richtig ist.

Die Tatsache, daß bei diesen beiden Konstruktionen jeweils eine Konvexitätsaussage sich als das entscheidende Hilfsmittel erweist, gab den Anstoß dafür, in der vorliegenden Arbeit für die beiden Relaxed Control Probleme die Äquivalenz in folgendem Sinne zu zeigen:

- 1.) Die Minimalwerte der Zielfunktionale sind gleich und damit gleich dem des Ausgangsproblems.
- 2.) Jede zulässige Kontrolle des Relaxed Control Problems nach WARGA führt zu einer zulässigen Kontrolle des Relaxed Control Problems nach IOFFE - TICHOMIROV und umgekehrt.

Da WARGA bisher nur den speziellen Fall des endlich-dimensionalen Phasenraumes behandelt hat, ist auf diese Weise gezeigt, daß die Konstruktion von WARGA auch für unendlich-dimensionalen Phasenraum den gleichen Minimalwert wie das Ausgangsproblem liefert. Außerdem erhält man aus den Existenzaussagen von IOFFE - TICHOMIROV für optimale Relaxed Kontrollen die entsprechenden Aussagen für die hier betrachtete Verallgemeinerung von WARGA's Konstruktion.

In den Beweis dieser Äquivalenzaussage gehen natürlich die meisten der für die Durchführung der Konstruktionen von WARGA und IOFFE - TICHOMIROV benötigten Hilfsmittel ein. Zusätzlich machen wir wesentlich Gebrauch von Sätzen von CASTAING [1969] über die Meßbarkeit von Korrespondenzen und von mittels Korrespondenzen definierten Funktionen, sowie von einer aus der Approximationstheorie bekannten Schlußweise (vgl. BROSIOWSKI - HOFFMANN [1974]). Damit erhalten wir eine Darstellung für den Integranden des Zielfunktional des Relaxed Control Problems nach IOFFE - TICHOMIROV, die es ermöglicht, mit Hilfe der Daten des Ausgangsproblems die einseitige Richtungsableitung dieses Zielfunktional zu beschreiben. Aus dieser Darstellung leiten wir im zweiten Teil der Arbeit ein Maximumprinzip für das Relaxed Control Problem in der Formulierung von IOFFE - TICHOMIROV her. Da wir dabei einen Selektionssatz auf eine gewisse, über mehrere Korrespondenzen definierte, komplexe

Funktion anwenden müssen, benötigen wir an dieser Stelle die endliche Dimension des Phasenraumes. Eine ähnliche Aussage wie unser Maximumprinzip gibt GANKRELIDZE [1962] für ein spezielles Kontrollproblem mit ebenfalls endlichdimensionalem Phasenraum an. Für das von IOFFE-TICHOMIROV betrachtete Relaxed Control Problem ist jedoch auch in diesem Fall keine Herleitung des Maximumprinzips bekannt.

Wir geben noch einen kurzen Überblick über den Inhalt der einzelnen Kapitel:

Im ersten Kapitel geben wir zunächst in (1.1.2) die Formulierung des gewöhnlichen Kontrollproblems, das allem Weiteren zugrunde liegt. In (1.1.5) bzw. (1.1.8) werden dann nach Bereitstellung der benötigten Begriffe die beiden Relaxed Control Probleme (RP.W) (Konstruktion nach WARGA) und (RP.T) (Konstruktion nach IOFFE-TICHOMIROV) eingeführt. Im zweiten Paragraphen geben wir in (1.2.4) und (1.2.17), ausgehend von zwei möglichen Darstellungen der abgeschlossenen konvexen Hülle einer Funktion (der einen entspricht die Definition konvexer Mengen, der anderen die Charakterisierung konvexer Mengen als Durchschnitt aller sie enthaltenden Halbräume) die zwei oben erwähnten Darstellungen des Integranden f° von (RP.T). Diese Darstellungen sind über geeignete Korrespondenzen, einerseits in die Familie der Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem Kontrollbereich U_0 , andererseits in die Familie der affinen Funktionale auf dem Phasenraum X , definiert. Im dritten Paragraphen beweisen wir Stetigkeits- und Meßbarkeitsaussagen über diese Korrespondenzen, die im vierten Paragraphen zum Beweis eines speziellen Selektionssatzes (1.4.1) benötigt werden, auf dem der Beweis der Äquivalenzaussage beruht.

Im zweiten Kapitel untersuchen wir die Richtungsableitungen von Funktionen der Struktur von f° , d.h. von Funktionen

der Art $\sup\{k(a,b) \in \mathbb{R} \mid b \in V(a)\}$. Dazu verallgemeinern wir Ergebnisse von DEM'YANOV u.a. (vgl. DEM'YANOV [1968 - 1974], DEM'YANOV - MALOZEMOV [1971], PEVNYI [1971]), die in endlich-dimensionalen Räumen die Richtungsableitungen von "max"- bzw. "minimax"-Funktionen verschiedener Art untersuchen.

Aus den Ergebnissen des zweiten Kapitels folgern wir im dritten Kapitel in (3.1.9) zunächst eine Darstellung der Richtungsableitung des Integranden des Relaxed Control Problems nach IOFFE - TICHOMIROV. Nach Umformung mit Hilfe eines Minimax - Theorems erhalten wir in (3.2.3) eine Darstellung der Richtungsableitung des Zielfunktional F° von (RP.T) (d.h. des Integrals über f° bezüglich des Zeitintervalls T). Diese Richtungsableitung hat als Integranden eine über gewisse Korrespondenzen definierte "min-max"-Funktion, in der die Mittelwerte der Funktion H_1 auftreten, die der Ableitung der Hamiltonfunktion nach der Phasenvariablen x entspricht. Die Vertauschung der Operationen "Min" und "Max" mit der Integration über das Zeitintervall T beruht auf zweifacher Anwendung starker Selektionssätze von CASTAING [1969], und war uns nur unter Beschränkung auf einen endlich-dimensionalen Phasenraum X möglich. Im letzten Paragraphen endlich leiten wir unter Regularitätsvoraussetzungen an die Lösung von (RP.T) ein Maximumprinzip für dieses Problem her. Das gelingt aufgrund der Kenntnis der von uns abgeleiteten, expliziten Darstellung der Richtungsableitung von F° . Diese liefert eine Beschreibung (3.3.7) der Abstiegsmenge von F° , d.h. der Menge derjenigen Richtungen, in denen das Funktional F° abnimmt. Unter Verwendung von speziellen Tatsachen über polare Mengen, die von IOFFE - TICHOMIROV hergeleitet werden, gewinnen wir daraus eine Darstellung der Polaren dieser Abstiegsmenge, von der wir wegen der Variationsungleichung (3.3.2) in (3.3.9) auf eine "schwache" adjungierte Differentialgleichung schließen können.

Mit den üblichen Schlüssen erhält man dann die adjungierte Gleichung in der gewünschten Form. Die Maximumbedingung, der das "Maximumprinzip" seinen Namen verdankt, ergibt sich in (3.3.10) ganz einfach aus der Charakterisierung (1.2.21) einer früher aufgetretenen Korrespondenz.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. G. Hämmerlin herzlich bedanken für seine großzügige und wohlwollende Unterstützung bei der Anfertigung dieser Arbeit. Herrn Prof. Dr. K.-H. Hoffmann danke ich sehr für die Anregung zu dieser Arbeit; sein großes Interesse und seine hilfreichen Hinweise haben die Entstehung der Arbeit sehr gefördert. Herrn Dr. E. Schäfer danke ich für seine stete Bereitschaft zu Diskussionen und konstruktiver Kritik.

Bezeichnungen und Definitionen

Einige im Verlauf der Arbeit häufig benötigte Bezeichnungen und Definitionen sind im folgenden zusammengestellt.

Für die Menge der reellen Zahlen verwenden wir das Symbol $\mathbb{R}$. Den Dualraum eines topologischen Vektorraumes X bezeichnen wir mit X' , seine Elemente werden durch einen Stern gekennzeichnet, also $x \in X$, $z^* \in X'$. Auch die Adjungierte einer stetigen, linearen Abbildung zwischen zwei topologischen Vektorräumen kennzeichnen wir durch einen Stern. Zu einer gegebenen Teilmenge A eines topologischen Vektorraumes bezeichnen wir mit $\text{cpt } A$, $\text{int } A$, $\text{cl } A$, $\text{con } A$, $\text{span } A$ das Komplement, das Innere, den Abschluß, die konvexe Hülle bzw. die lineare Hülle von A .

Für einen topologischen Raum A mit gegebener Topologie bezeichnen wir mit $\mathcal{X}(A)$, $\mathcal{U}(A)$, $\mathcal{B}(A)$, $\mathcal{P}(A)$ (oder $\mathcal{X}_A$ usw)) die Familien aller offenen, abgeschlossenen, borelschen bzw. aller Teilmengen von A . Um die Topologien zu betonen, bezüglich derer wir von der Stetigkeit einer Abbildung $f : A \rightarrow B$ sprechen, nennen wir die Abbildung f $(\mathcal{X}_A, \mathcal{X}_B)$ -stetig. Um bei Funktionen mehrerer Variabler anzuzeigen, daß ein Teil der Variablen fest gewählt ist, verwenden wir die Schreibweise

$$g(a, \cdot) := (b \mapsto g(a, b)) : B \rightarrow C,$$

von der wir auch Gebrauch machen, wenn wir komplizierte Funktionen explizit definieren müssen.

Mit $K(A, X)$ bzw. $K(A)$ bezeichnen wir den Raum aller stetigen Funktionen auf A mit kompaktem Träger, deren Bilder in X bzw. in $\mathbb{R}$ liegen.

Eine Abbildung Γ von A nach $\mathcal{P}(B)$ heißt Korrespondenz (mengenwertige Abbildung) von A in B . Wir schreiben wie für gewöhnliche Abbildungen $\Gamma : A \rightarrow B$. Korrespondenzen bezeichnen wir stets mit Großbuchstaben. Für eine Korrespondenz $\Gamma : A \rightarrow B$ und eine Menge $C \subset B$ setzen wir

$$\begin{aligned}\Gamma^{-}[C] &:= \{a \in A \mid \Gamma(a) \cap C \neq \emptyset\} , \\ \Gamma^{+}[C] &:= \{a \in A \mid \Gamma(a) \subset C\} .\end{aligned}$$

Die Menge

$$\text{Gr}(\Gamma) := \{(a,b) \in A \times B \mid b \in \Gamma(a)\}$$

heißt Graph der Korrespondenz.

Eine Korrespondenz $\Gamma : A \rightarrow B$ heißt oberhalbstetig (im Sinne von KURATOWSKI), wenn gilt:

$$(C \in \mathcal{I}_B \Rightarrow \Gamma^{+}[C] \in \mathcal{I}_A) ,$$

und unterhalbstetig, wenn gilt

$$(C \in \mathcal{U}_B \Rightarrow \Gamma^{+}[C] \in \mathcal{U}_A) .$$

Diese und weitere Stetigkeitsbegriffe für Korrespondenzen werden etwa bei DIEROLF [1973], HILDENBRAND [1967] und KURATOWSKI [1965] untersucht.

Seien U ein lokalkompakter Raum, μ ein Radonmaß auf U , E ein topologischer Raum. Eine Korrespondenz $\Gamma : U \rightarrow E$ heißt μ -meßbar, wenn für jedes $A \in \mathcal{U}(E)$ die Menge $\Gamma^{-}[A]$ μ -meßbar ist. Meßbare Korrespondenzen werden insbesondere in CASTAING [1969], IOFFE-LEVIN [1972, Anhang 2] behandelt.

1. Kapitel: Relaxed Control Probleme

§1 Formulierung der Probleme (RP.W) und (RP.T)

(1.1.1) Gegeben seien

- (a) $T := [t_0, t_1]$, ein kompaktes Intervall der reellen Zahlen (Zeitintervall),
- (b) X , ein reflexiver, separabler Banachraum (Phasenraum),
- (c) U_0 , ein kompakter metrischer Raum (Kontrollbereich),
- (d) eine Funktion $g : T \times X \times U_0 \rightarrow \mathbb{R}$,
Lebesgue-meßbar in $t \in T$, stetig in $u \in U_0$,
Lipschitz-stetig in $x \in X$ glm. bez. $t \in T$
und $u \in U_0$,
- (e) eine Funktion $G : T \times X \times U_0 \rightarrow X$,
Lebesgue-meßbar in $t \in T$,
stetig in $u \in U_0$ bez. $\sigma(X, X')$ auf X ,
Lipschitz-stetig in $x \in X$ glm. bez. $t \in T$
und $u \in U_0$,
- (f) eine Korespondenz $U : T \rightarrow U_0$,
oberhalbstetig (im Sinne von Kuratowski),
 $t \in T \quad U(t) = \text{cl } U(t)$,
- (g) der Raum $C[T, X]$ aller stetigen Funktionen
 $\underline{x} : T \rightarrow (X, \|\cdot\|)$,
- (h) der Raum $MF[T, U_0]$ aller meßbaren Funktionen
 $\underline{u} : T \rightarrow U_0$.

Konvention:

Die Schreibweise $\underline{x} \in C[T, X]$ dient zur Unterscheidung der Funktionen $\underline{x}$ mit Werten in X von den Elementen $x \in X$. Für $t \in T$ bezeichnen wir das Bild unter $\underline{x}$ einfach mit $x(t)$. Entsprechende Konventionen gelten für alle im folgenden be-

trachteten Funktionen.

Ferner verwenden wir, wenn kein Mißverständnis zu befürchten ist, für Funktionenräume abgekürzte Bezeichnungen wie $C := C[T, X]$ usw.

Nun können wir unser Ausgangsproblem formulieren.

(1.1.2) Kontrollproblem (OC)

Minimiere das Funktional

$$(a) \quad F(\underline{x}, \underline{u}) := \int_T g(t, x(t), u(t)) dt$$

über der Menge von Funktionenpaaren $(\underline{x}, \underline{u}) \in C \times MF$, die den folgenden Bedingungen genügen:

$$(b) \quad \dot{x}(t) = G(t, x(t), u(t)) \quad \text{f.ü.}, \quad x(t_0) = x_0,$$

$$(c) \quad u(t) \in U(t) \quad \text{f.ü.}$$

(1.1.3) Definition

Ein Funktionenpaar $(\underline{x}, \underline{u})$, das (b) und (c) erfüllt und das Minimum von F bezüglich dieser Klasse realisiert, heißt Lösung von (OC). $(\underline{x}, \underline{u}) \in C \times MF$ mit (b) und (c) heißt zulässig. Eine Funktion $\underline{u} \in MF$ mit (c) heißt zulässige Kontrolle, ein $\underline{x} \in C$, so daß $(\underline{x}, \underline{u})$ (b) erfüllt, heißt zu $\underline{u}$ gehörige Trajektorie. Das Infimum des Funktionals F auf der Menge der zulässigen Elemente nennen wir den Wert des Problems (OC) (Wert von (OC)). **

Für die von WARGA [1972] angegebene Konstruktion eines Relaxed Control Problems zu unserem Ausgangsproblem werden weitere Bezeichnungen benötigt.

(1.1.4) Definition

(a) $M_1^+(U_0) :=$ Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf U_0 ,
versehen mit der vagen Topologie,

(b) $S := \{ \underline{m} : T \rightarrow M_1^+(U_0) \mid \underline{m} \text{ meßbar } \},$

(c) $S_0 := \{ \underline{m} \in S \mid m(t)(U(t)) = 1 \text{ f.ü.} \}.$

Für ein festes $\underline{x} \in C$ und $t \in T$ sind $g(t, x(t), \cdot)$
und $G(t, x(t), \cdot)$ stetige Funktionen auf U_0 . Ihre Fort-
setzung auf die Menge $M_1^+(U_0)$ ist dann definiert durch

(d) $(m \rightarrow \hat{g}(t, x(t), m) := \int_{U_0} g(t, x(t), u) m(du))$
 $: M_1^+(U_0) \rightarrow \mathbb{R},$

(e) $(m \rightarrow \hat{G}(t, x(t), m) := \int_{U_0} G(t, x(t), u) m(du))$
 $: M_1^+(U_0) \rightarrow X.$

Wegen der Voraussetzungen an X und G ist die Menge
 $G(t, x(t), U_0)$ σ -kompakt in X und deshalb ist
 $\hat{G}(t, x(t), m) \in X$. Also ist die Abbildung $\hat{G}$ wohldefiniert. **

Mit diesen Bezeichnungen läßt sich das zu (OC) nach WARGA
[1972] konstruierte Relaxed Control Problem formulieren.

(1.1.5) Relaxed Control Problem (RP.W)

Minimiere das Funktional

(a) $\hat{F}(\underline{x}, \underline{m}) := \int_T \hat{g}(t, x(t), m(t)) dt$

Über der Menge von Funktionenpaaren $(\underline{x}, \underline{m}) \in C \times S$, die den
folgenden Bedingungen genügen:

$$(b) \quad \dot{x}(t) = \hat{G}(t, x(t), m(t)) \quad \text{f.ü.}, \quad x(t_0) = x_0,$$

$$(c) \quad \underline{m} \in S_0, \text{ d.h. } m(t) \in M_1^+(U(t)) \quad \text{f.ü.}$$

Ebenso wie in (1.1.2) für (OC) definieren wir Lösungen, zulässige Kontrollen und zugehörige Trajektorien für (RP.W).

Bemerkung In WARGA [1972] werden die Probleme (OC) und (RP.W) für endlichdimensionalen Phasenraum X betrachtet.

Um die von IOFFE-TICHOMIROV [1968] angegebene Form des Relaxed Control Problems darstellen zu können, benötigen wir einige Tatsachen über konvexe Funktionen, die man etwa bei MOREAU [1966/67] findet.

(1.1.6) Definition

Gegeben seien ein lokalkonvexer Raum X und eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R} \quad (\mathbb{R} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$. Die Funktion f heißt konvex, wenn gilt:

$$(a) \quad \bigwedge x_1, x_2 \in X \quad \bigwedge \alpha \in [0, 1] \\ f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$

Die Menge

$$(b) \quad \text{dom } f := \{x \in X \mid f(x) < +\infty\}$$

heißt Domain von f oder effektiver Definitionsbereich von f .

Die Menge

$$(c) \quad \text{Epi } f := \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq r\}$$

heißt Epigraph der Funktion f .

Der Epigraph einer konvexen Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine konvexe Teilmenge des Graphenraumes $X \times \mathbb{R}$.

Durch die Definition

$$(d) \quad f^*(z^*) := \sup_{x \in X} \{ \langle z^*, x \rangle - f(x) \}$$

erhält man eine Funktion $f^* : X' \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, die auf X' konvex und unterhalbstetig ist. Die Funktion $f^{**} : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist dann ebenfalls konvex und unterhalbstetig und es gilt:

$$(e) \quad \bigwedge x \in X \quad f^{**}(x) \leq f(x)$$

und

$$(f) \quad \text{dom } f \subset \text{dom } f^{**} \subset \text{cl con dom } f.$$

Die Funktion f^{**} nennen wir die abgeschlossene konvexe Hülle der Funktion f . Im Graphenraum $X \times \mathbb{R}$ gilt:

$$(g) \quad \text{Epi } f^{**} = \text{cl con Epi } f.$$

Sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Eine affine Funktion $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = \langle z^*, x \rangle + w^*$ und $g \leq f$ heißt Minorante von f . Gilt für ein $x_0 \in X$ $g(x_0) = f(x_0)$, so heißt g eine in x_0 exakte Minorante an f .

Ist $(z^*, w^*) \in X' \times \mathbb{R}$ eine in $x_0 \in X$ exakte affine Minorante an f , so heißt $z^* \in X'$ Subgradient von f in x_0 . Die Menge der Subgradienten von f in x_0 heißt Subdifferential von f in x_0 und wird mit $\partial f(x_0)$ bezeichnet. Es ist $z^* \in \partial f(x_0)$ genau dann, wenn gilt

$$(h) \quad \bigwedge x \in X \quad f(x) - f(x_0) \geq \langle z^*, x - x_0 \rangle.$$

Eine konvexe unterhalbstetige Funktion ist punktweise gleich dem Supremum ihrer affinen Minoranten. Es gilt $f = f^{**}$ genau dann, wenn f konvex und unterhalbstetig ist.

(1.1.7)

Ausgehend von der in (OC) gegebenen Situation definieren wir zunächst eine Hilfsfunktion $f : T \times X \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ durch

$$(a) \quad f(t, x, y) := \inf \{ g(t, x, u) \in \mathbb{R} \mid u \in U(t) \\ \wedge G(t, x, u) = y \}$$

Diese Funktion wird nun bezüglich der Variablen y "konvexifiziert" durch die Definition

$$(b) \quad f^\circ(t, x, \cdot) := (f(t, x, \cdot))^* .$$

Weiter definieren wir

$$(c) \quad Q(t, x) := G(t, x, U(t)) ,$$

$$(d) \quad \overline{Q}(t, x) := \text{cl con } Q(t, x) .$$

Nun können wir die von IOFFE-TICHOMIROV [1968] angegebene Konstruktion des "Relaxed Control Problems" formulieren.

(1.1.8) Relaxed Control Problem (RP.T)

Minimiere das Funktional

$$(a) \quad F^\circ(\underline{x}, \underline{y}) := \int_T f^\circ(t, x(t), y(t)) dt$$

Über der Menge von Funktionenpaaren

$$(\underline{x}, \underline{y}) \in C[T, X] \times L_1[T, X] ,$$

die den folgenden Bedingungen genügen:

$$(b) \quad \dot{x}(t) = y(t) \quad \text{f.ü.}, \quad x(t_0) = x_0 ,$$

$$(c) \quad y(t) \in \overline{Q}(t, x(t)) \quad \text{f.ü.}$$

Ebenso wie in (1.1.3) und (1.1.5) für (OC) bzw. (RP.W) definieren wir Lösungen, zulässige Kontrollen und zugehörige Trajektorien $\underline{x}$ zu einer gegebenen Kontrolle $\underline{y}$ für (RP.T).

(1.1.9) Bemerkung

Bei der Minimierung von (1.1.8 a) spielen natürlich nur diejenigen $(\underline{x}, \underline{y}) \in C \setminus L_1$ eine Rolle, für die $F^\circ(\underline{x}, \underline{y}) < +\infty$ gilt. Für diese muß dann nach (1.1.6 f) für fast alle $t \in T$ gelten

$$y(t) \in \text{dom } f^\circ(t, x(t), \cdot) \subseteq \bar{Q}(t, x(t)) .$$

Da sich in (1.2.9) zeigen wird, daß gilt

$$\text{dom } f^\circ(t, x(t), \cdot) = \bar{Q}(t, x(t)),$$

brauchen wir in (1.1.8) die Bedingung (c) nicht explizit zu berücksichtigen.

IOFFE und TICHIMIROV [1968] machen Aussagen über die Existenz von Lösungen (RP.T) und zeigen, daß zu jedem zulässigen Paar $(\underline{x}, \underline{y})$ für (RP.T) eine Folge von zulässigen Paaren $(\underline{x}_n, \underline{u}_n)$ für (OC) existiert, so daß gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(\underline{x}_n, \underline{u}_n) \leq F^\circ(\underline{x}, \underline{y}) .$$

Da jedes zulässige Element $(\underline{x}, \underline{u})$ von (OC) zu einem zulässigen Element $(\underline{x}, \underline{y}_u)$ von (RP.T) führt mit $F^\circ(\underline{x}, \underline{y}_u) \leq F(\underline{x}, \underline{u})$ folgt aus dieser Tatsache, daß der Wert von (OC) gleich dem Wert von (RP.T) ist.

Ferner ergibt sich daraus, daß zu jeder Lösung $(\underline{x}, \underline{y})$ von (RP.T) eine minimierende Folge $(\underline{x}_n, \underline{u}_n)$ von (OC) existiert.

Mit (RP.T) hat man also zu (OC) ein Kontrollproblem kon-

struiert, das von sehr einfacher Struktur ist, - die Differentialgleichung ist autonom und enthält nur die Kontrolle (sogar linear), und der Integrand ist konvex in der Kontrolle - , aber trotzdem die wesentliche Information des Ausgangsproblems enthält. Diese wird durch die in (1.1.7) durchgeführte Konstruktion (RP.T) in den Integranden f° des Funktionals F° eingebracht. Unser nächstes Ziel ist es, einerseits das Problem (RP.T) durch die Daten des Ausgangsproblems (OC) zu beschreiben und andererseits einen Zusammenhang zwischen (RP.T) und (RP.W) aufzuzeigen. Dazu untersuchen wir zunächst den Integranden f° von (RP.T).

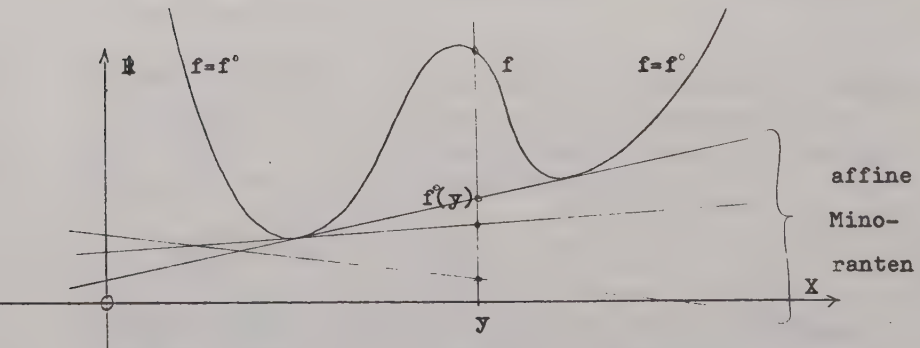
§2 Untersuchung des Integranden von (RP.T)

In diesem Paragraphen studieren wir den Integranden f° der Zielfunktion F° von (RP.T) für feste Werte $t \in T$ und $x \in X$; für diese Überlegungen bezeichnen wir die Funktion $f^\circ(t, x, \cdot) : X \rightarrow \mathbb{R}$ wieder mit f° .

Auch bei den anderen in (OC) bzw. (RP.T) und (RP.W) auftretenden Funktionen und Korrespondenzen lassen wir die Argumente $t \in T$ und $x \in X$ fort, solange diese fest gewählt sind, insbesondere setzen wir $U := U(t)$.

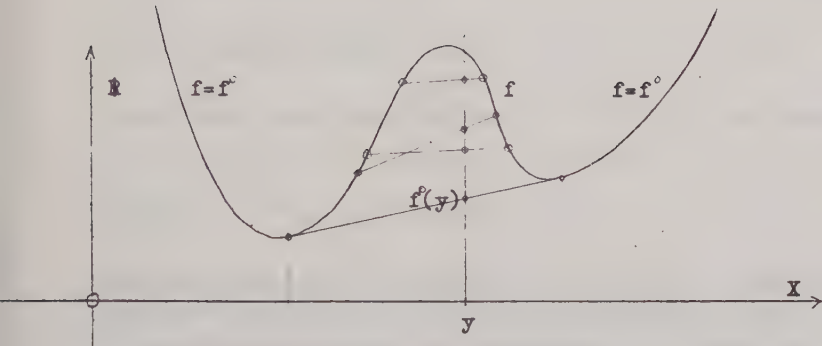
Wir beginnen mit der Darstellung von f° durch die Daten des Ausgangsproblems (OC); sie beruht auf der in (1.1.5) erwähnten Tatsache, daß die Funktion f° punktweises Supremum ihrer affinen Minoranten ist.

Für den Fall $X := \mathbb{R}$ hat man im Graphenraum $\mathbb{R}^2$ der Funktion f und $f^\circ : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ anschaulich die folgende Situation:



Figur 3

In diesem Fall läßt sich noch eine weitere Darstellung für f° geben:



Figur 4

Für ein gegebenes Element $y \in X$ läßt $f^{\circ}(y)$ sich darstellen als Infimum über alle Konvexkombinationen $\sum \alpha_i f(y_i)$ ($\alpha_i \geq 0$, $\sum \alpha_i = 1$), die gerade das Argument $y \in X$ als Schwerpunkt $\sum \alpha_i y_i$ der Argumente $y_i \in X$ liefern. In unserem Fall sind die beteiligten Elemente $y_i \in X$ von der Form $G(u_i)$ mit $u_i \in U$. Daher wird es sich als günstig erweisen, die den Konvexkombinationen entsprechenden Mittelwerte auf die Wahrscheinlichkeitsmaße auf U zurückzuspielen. Auf diese Weise werden wir eine zweite Darstellung von f° gewinnen, aus der wir später eine Aussage über den Zusammenhang der Probleme (RP.W) und (RP.T) herleiten können. Zunächst führen wir einige Funktionen ein, die in allen weiteren Überlegungen eine Rolle spielen werden.

(1.2.1) Definition

Die Funktion $K : T \times X \times X' \times U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ wird definiert durch

$$(a) \quad K(t, x, z^*, u) := \langle z^*, G(t, x, u) \rangle - g(t, x, u) \quad ,$$

die Funktion $S : T \times X \times X' \rightarrow \mathbb{R}$ wird definiert durch

$$(b) \quad S(t, x, z^*) := \sup \{ K(t, x, z^*, u) \in \mathbb{R} \mid u \in U(t) \} ,$$

die Funktion $E : T \times X \times X' \times M_1^+(U_0) \rightarrow \mathbb{R}$ wird definiert durch

$$(c) \quad E(t, x, z^*, m) := \int_{U_0} K(t, x, z^*, u) m(du) .$$

Die Funktion K ist ihrer Struktur nach der normalerweise betrachteten Hamiltonfunktion $H : T \times X \times X' \times U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $H(t, x, z^*, u, \lambda) := \langle z^*, G(t, x, u) \rangle - \lambda g(t, x, u)$, gleich. Jedoch spielt die Abhängigkeit von der reellen Variablen λ , die die Gewichtung der beiden Summanden gegeneinander ausdrückt, vorläufig keine Rolle, sie wird erst im letzten Teil der Arbeit bei der Herleitung eines Maximumprinzips für das Relaxed Control Problem (RP.T) auftreten. Wir werden daher auch von der Hamiltonfunktion K sprechen.

Die Funktion S entspricht der Maximumfunktion, die im Maximumprinzip für gewöhnliche Kontrollprobleme auftritt. Sie kommt bei unseren Überlegungen von Anfang an ins Spiel, im Gegensatz zur Situation bei gewöhnlichen Kontrollproblemen, wo sie meist erst am Ende der zum Maximumprinzip führenden Überlegungen eine Rolle spielt.

Das Auftreten der Funktion E ist charakteristisch für die hier betrachtete Situation. Sie liefert für feste Werte $t \in T$, $x \in X$, $z^* \in X'$ gerade den Mittelwert der Hamiltonfunktion K bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes m auf U_0 . Da die oben erwähnte Mittelung mit W -Maßen in unseren weiteren Überlegungen eine wichtige Rolle spielen wird, ist das Auftreten der Funktion E ganz natürlich.

(1.2.2) Definition

Seien $t \in T$ und $x \in X$ gegeben.

$$(a) \quad P(t, x) := \{ (z^*, w^*) \in X' \times \mathbb{R} \mid S(t, x, z^*) + w^* \leq 0 \} .$$

Durch die Festsetzung

$$(b) \quad f_1(y) := \sup \{ \langle z^*, y \rangle + w^* \in \mathbb{R} \mid (z^*, w^*) \in P(t, x) \}$$

wird eine Funktion $f_1 : X \rightarrow \mathbb{R}$ definiert.

(1.2.3)

Für fest gewählte Elemente $t \in T$ und $x \in X$ setzen wir im folgenden, wo kein Mißverständnis zu befürchten ist,

$P := P(t, x)$. Wie man der Beziehung

$$(a) \quad \begin{aligned} P &= \{ (z^*, w^*) \in X' \times \mathbb{R} \mid \bigwedge u \in U: K(t, x, u) + w^* \leq 0 \} \\ &= \{ (z^*, w^*) \in X' \times \mathbb{R} \mid \bigwedge u \in U: \langle z^*, G(u) \rangle + w^* \leq g(u) \} \end{aligned}$$

entnimmt, ist P gerade die Familie der affinen Funktionale auf X , die auf der Menge $G(U)$ Minoranten sind für die in (1.1.7 a) definierte Hilfsfunktion f . Wie der nächste Satz zeigt, sind das auch schon alle affinen Minoranten von f° .

Mit den Eigenschaften der Korrespondenz

$$(b) \quad ((t, x) \rightarrow P(t, x)) : T \times X \rightarrow X' \times \mathbb{R}$$

werden wir uns später noch genauer beschäftigen.

(1.2.4) Satz

$$\forall y \in X \quad f^\circ(y) = f_1(y)$$

Beweis:

Sei $(z^*, w^*) \in P$. Dann gilt nach Definition von P

$$\forall u \in U \quad \langle z^*, G(u) \rangle + w^* \leq g(u) .$$

Für jedes $y \in G(u)$ und für alle $u_y \in U \cap G^{-1}(y)$ erhält man daraus wegen

$$\langle z^*, y \rangle + w^* = \langle z^*, G(u_y) \rangle + w^* \leq g(u_y)$$

die Beziehung

$$\langle z^*, y \rangle + w^* \leq \inf \{ g(u) \in \mathbb{R} \mid u \in U \wedge G(u) = y \} = f(y) \quad .$$

Für $y \notin G(u)$ ist diese Ungleichung wegen $f(y) = +\infty$ trivialerweise erfüllt. Da $(z^*, w^*) \in P$ beliebig gewählt war, ergibt sich für alle $y \in X$

$$f_1(y) = \sup \{ \langle z^*, y \rangle + w^* \in \mathbb{R} \mid (z^*, w^*) \in P \} \leq f(y) \quad .$$

Damit ist f_1 eine konvexe unterhalbstetige Funktion, die f minorisiert. Da f° nach Moreau [1966/67] die größte derartige Minorante von f ist, muß auch gelten

$$\bigwedge y \in X \quad f_1(y) \leq f^\circ(y) \quad .$$

Sei nun durch (z^*, w^*) eine affine Minorante von f° gegeben. Dann gilt für alle $y \in X$

$$\langle z^*, y \rangle + w^* \leq f^\circ(y) \leq f(y) \quad .$$

Wählt man speziell $y \in G(u)$, so gilt für alle $u_y \in U \cap G^{-1}(y)$

$$\begin{aligned} \langle z^*, G(u_y) \rangle + w^* &= \langle z^*, y \rangle + w^* \leq f^\circ(y) \leq f(y) = \\ &= \inf \{ g(u) \in \mathbb{R} \mid u \in U \wedge G(u) = y \} \leq g(u) \quad . \end{aligned}$$

Wegen $U \setminus (U \cap G^{-1}(y) \mid y \in G(U)) = U$ gilt dann für alle $u \in U$ $\langle z^*, G(u) \rangle - g(u) + w^* \leq 0$ und damit $(z^*, w^*) \in P$. Also muß auch gelten $\bigwedge y \in X \quad f^\circ(y) \leq f_1(y)$. **

Bevor wir die zweite angekündigte Darstellung für f° angeben können, müssen wir einige Hilfsmittel bereitstellen. Die im folgenden angeführten Tatsachen über topologische Vektorräume und Radonmaße findet man etwa bei BOURBAKI [1966] und [1965] .

(1.2.5)

Da nach den Voraussetzungen in (1.1.1) die Abbildung G von der kompakten Menge U_0 nach X , versehen mit der Topologie $\sigma(X, X')$, stetig ist, ist $G(U)$ σ -kompakt in X und daher beschränkt. Deshalb ist auch die Menge $\bar{Q} = \text{cl con } G(U)$ beschränkt. Wegen der Reflexivität von X ist $\bar{Q}$ als konvexe, σ -abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von X auch σ -kompakt und deshalb σ -vollständig. Daher ist für jedes Element $m \in M_1^+(U)$ das Integral $\hat{G}(m) := \int G(u) m(du)$ Element aus X . Ferner ist unter diesen Voraussetzungen

$$(a) \quad \text{cl con } G(U) = \{\hat{G}(m) \in X \mid m \in M_1^+(U)\} .$$

Da nach Voraussetzung für jedes $t \in T$ $U = U(t)$ abgeschlossene Teilmenge des kompakten, metrischen Raumes U_0 ist, kann man nach SCHWARTZ [1973] die Menge $M_1^+(U)$, versehen mit der vagen Topologie, identifizieren mit der Menge $\bar{M} := \{m \in M_1^+(U_0) \mid \text{supp}(m) \subset U\}$, versehen mit der von der vagen Topologie auf $M_1^+(U_0)$ induzierten Topologie.

(1.2.6) Definition

Seien $t \in T$ und $x \in X$ fest gewählt. Für alle $y \in \bar{Q}$ definieren wir die Menge der y darstellenden Maße

$$(a) \quad M(y) := \{m \in M_1^+(U) \mid \hat{G}(m) = y\} ,$$

und für $y \in X$ setzen wir

$$(b) \quad f_2(y) := \begin{cases} \inf\{\hat{g}(m) \in \mathbb{R} \mid m \in M(y)\} & , y \in \bar{Q} \\ +\infty & \text{für } y \notin \bar{Q} \end{cases} .$$

(1.2.7) Lemma

Die Funktion $f_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ ist konvex und es gilt

$$\bigwedge y \in \bar{Q} \quad f_2(y) = \min\{\hat{g}(m) \in \mathbb{R} \mid m \in M(y)\} .$$

Beweis:

Da die Abbildung $L := (m \rightarrow \hat{G}(m)) : M_1^+(U) \rightarrow X$ (vag, σ)-stetig ist, ist $M(y)$ als Urbild des Punktes $y \in X$ vag-kompakt. Daraus folgt die zweite Behauptung. Sei nun für $i=1,2$ $y_i \in \bar{Q}$ und $m_i \in M(y_i)$ mit $f_2(y_i) = \hat{g}(m_i)$. Dann gilt für $\delta \in [0,1]$ wegen

$$\delta m_1 + (1-\delta)m_2 \in M(\delta y_1 + (1-\delta)y_2)$$

die Beziehung

$$\begin{aligned} \delta f_2(y_1) + (1-\delta)f_2(y_2) &= \delta \hat{g}(m_1) + (1-\delta)\hat{g}(m_2) = \\ &= \hat{g}(\delta m_1 + (1-\delta)m_2) \geq \min\{\hat{g}(m) \in \mathbb{R} \mid \\ &m \in M(\delta y_1 + (1-\delta)y_2)\} = f_2(\delta y_1 + (1-\delta)y_2) . \quad ** \end{aligned}$$

(1.2.8) Lemma

$$\bigwedge y \in X \quad f^\circ(y) \leq f_2(y)$$

Beweis:

Gilt $M(y) = \emptyset$, so ist einerseits $f_2(y) = +\infty$ und andererseits wegen (1.2.5 a)

$$y \notin \text{cl con } G(U) \supset \text{dom } f^\circ \quad \text{und daher} \quad f^\circ(y) = +\infty ,$$

und die Ungleichung ist trivialerweise erfüllt. Sei also $m \in M(y)$. Sei ferner $(z^*, w^*) \in P$. Nach Definition von P gilt dann $\bigwedge u \in U \langle z^*, G(u) \rangle + w^* \leq g(u)$. Da die Elemente von $M(y)$ positive Maße sind, kann man diese Ungleichung bezüglich m integrieren und erhält wegen $\hat{G}(m) = y$

$$\begin{aligned} \hat{g}(m) &\geq \int (\langle z^*, G(u) \rangle + w^*) m(du) = \\ &= \int \langle z^*, G(u) \rangle m(du) + \int w^* m(du) = \\ &= \langle z^*, \int G(u) m(du) \rangle + w^* \int m(du) = \\ &= \langle z^*, y \rangle + w^* . \end{aligned}$$

Da $m \in M(y)$ und $(z^*, w^*) \in P$ beliebig waren, erhält man daraus

$$\begin{aligned} f^\circ(y) &= \sup \{ \langle z^*, y \rangle + w^* \in \mathbb{R} \mid (z^*, w^*) \in P \} \leq \\ &\leq \inf \{ \hat{g}(m) \in \mathbb{R} \mid m \in M(y) \} = f_2(y) . \quad ** \end{aligned}$$

(1.2.9) Korollar

$$\text{dom } f^\circ = \text{cl con } G(U)$$

Beweis:

Wegen $\bar{Q} = \text{cl con } G(U) = \{ \hat{G}(m) \in X \mid m \in M_1^+(U) \}$ gilt für jedes $y \in \bar{Q}$ $M(y) \neq \emptyset$ und daher $+\infty > f_2(y) \geq f^\circ(y)$. **

Der Beweis für die umgekehrte Ungleichung $f^\circ \geq f_2$ beruht auf einer Schlußweise, die in der Approximationstheorie häufig verwendet wird (siehe etwa BROSKOWSKI - WEGMANN [1973], BROSKOWSKI - HOFFMANN [1974]) und letztlich auf ČEBYŠEV zurückgeht. Dazu machen wir eine Voraussetzung, die auch bei späteren Überlegungen noch benötigt wird.

(1.2.10) Voraussetzung

Für alle $t \in T$ und für alle $x \in X$ ist das Innere (bezüg-

lich der Normtopologie auf X) von $cl \text{ con } G(t, x, U)$ nicht leer. Wir setzen zur Abkürzung

$$Q_0 := Q_0(t, x) := \text{int} \parallel cl \text{ con } G(U) .$$

(1.2.11) Satz

$$\bigwedge y \in Q_0 \quad f^\circ(y) = f_2(y)$$

Beweis:

Wegen (1.2.8) ist nur $f^\circ(y) \supseteq f_2(y)$ zu zeigen. Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten:

(1.2.12) Behauptung

Sei $y \in Q_0$, dann existiert eine in y exakte affine Minorante an f° .

Beweis: MOREAU [1966/67] **

(1.2.13) Definition

Seien $t \in T$ und $x \in X$ fest gewählt und sei $y \in \text{dom } f^\circ$. Die Menge der in y exakten affinen Minoranten (z^*, w^*) an f° bezeichnen wir mit $R(y) = R(t, x, y)$.

(1.2.14) Lemma

(a) $R(y) \subset P$.

Sei $(z^*, w^*) \in R(y)$. Dann gilt

(b) $U^* := \{u \in U \mid K(z^*, u) + w^* = 0\} \neq \emptyset$.

Beweis:

Die erste Aussage ist klar nach Definition von P und f° .
Sei nun $(z^*, w^*) \in R(y)$, d.h. $\langle z^*, y \rangle + w^* = f^\circ(y)$.
Nehmen wir an, es gelte $U^* = \emptyset$. Dann ist für alle $u \in U$

$$K(z^*, u) + w^* \leq -\varepsilon < 0 \quad (\varepsilon > 0)$$

wegen der Kompaktheit von U . Daraus folgt aber
 $(z^*, w^* + \varepsilon/2) \in P$ und damit

$$\langle z^*, y \rangle + w^* < \langle z^*, y \rangle + w^* + \varepsilon/2 \leq f^\circ(y),$$

im Widerspruch zur Voraussetzung $(z^*, w^*) \in R(y)$. **

(1.2.15) Behauptung

Sei $(z^*, w^*) \in R(y)$ eine in y exakte affine Minorante an f° . Wir setzen

$$(a) \quad U^* := \{u \in U \mid K(t, x, z^*, u) + w^* = 0\}.$$

Dann gilt $y \in \text{cl con } G(U^*)$.

Beweis:

Zunächst ist K bezüglich der Variablen u σ -stetig, wegen der entsprechenden Stetigkeit von G . Also ist U^* als Urbild von $\{-w^*\}$ unter der Abbildung K eine abgeschlossene Teilmenge des Kompaktums U und damit selbst kompakt. Die gleiche Argumentation wie im Beweis zu (1.2.5) zeigt dann die σ -Kompaktheit von $\text{cl con } G(U^*)$.

Nehmen wir an, y sei nicht enthalten in $Q^* := \text{cl con } (G(U^*))$, dann existiert eine abgeschlossene Hyperebene in X , die y und Q^* trennt und durch $y^* \in X'$ und $s^* \in \mathbb{R}$ gegeben ist. Die durch y^* und s^* definierten Halbräume in X bezeichnen wir mit

$$\begin{aligned}
 (b) \quad H^-(y^*, s^*) &:= \{x \in X \mid \langle y^*, x \rangle < s^*\} , \\
 H^-[y^*, s^*] &:= \{x \in X \mid \langle y^*, x \rangle \leq s^*\} , \\
 H^+(y^*, s^*) &:= \{x \in X \mid \langle y^*, x \rangle > s^*\} , \\
 H^+[y^*, s^*] &:= \{x \in X \mid \langle y^*, x \rangle \geq s^*\} .
 \end{aligned}$$

Wir können o.E. y^* und s^* als so gewählt annehmen, daß gilt $y \in H^-(y^*, s^*)$ und $Q^* \subset H^+(y^*, s^*)$. Wegen der Stetigkeit von G gibt es eine offene Teilmenge U_1 von U mit $G(U_1) \subset H^+(y^*, s^*)$ und $U_1 \supset U^*$. Nun betrachten wir die Mengen U_1 und $V_1 := U \setminus U_1$ und die Funktion

$$K(t, x, z_0^*, \cdot) + w_0^* : U \rightarrow \mathbb{R} .$$

Wegen der Stetigkeitsvoraussetzungen an G und g bezüglich der Variablen u ist diese Funktion stetig. Da für die kompakte Menge V_1 gilt $V_1 \cap U^* = \emptyset$, muß $e := -\max\{K(t, x, z_0^*, u) + w_0^* \mid u \in V_1\} > 0$ sein. Bezüglich U_1 konstruieren wir nun analog zu f eine Funktion f^* auf die folgende Weise: Wir setzen

$$\begin{aligned}
 S^*(z^*) &:= \sup\{K(t, x, z^*, u) \in \mathbb{R} \mid u \in U_1\} , \\
 (c) \quad P^* &:= \{(z^*, w^*) \in X' \times \mathbb{R} \mid S^*(z^*) + w^* \leq 0\} , \\
 f^*(y) &:= \sup\{\langle z^*, y \rangle + w^* \in \mathbb{R} \mid (z^*, w^*) \in P^*\} .
 \end{aligned}$$

Die Funktion $f^* : X \rightarrow \mathbb{R}$ ist konvex und unterhalbstetig und es gilt

$$\text{dom } f^* \subset \text{cl con } G(U_1) .$$

Wegen

$$y \in H^-(y^*, s^*) = \text{cpt } H^+[y^*, s^*]$$

und

$$H^+[y^*, s^*] = \text{cl con } H^+(y^*, s^*) \supset \text{cl con } G(U_1) ,$$

gilt $y \notin \text{dom } f^*$, d.h. $f^*(y) = +\infty$. Daher gilt

$$\bigwedge N > 0 \quad \bigvee (z_N^*, w_N^*) \in P^*: \langle z_N^*, y \rangle + w_N^* > N.$$

Wir wählen nun ein festes $N > f^\circ(y) = \langle z_0^*, y \rangle + w_0^*$ und betrachten den Wert

$$\begin{aligned} d &:= S(t, x, z_N^*) + w_N^* \\ &= \max\{K(t, x, z_N^*, u) + w_N^* \in \mathbb{R} \mid u \in U\}. \end{aligned}$$

1. Fall: $d \leq 0$.

Dann ist aber $(z_N^*, w_N^*) \in P$ und es gilt

$$f^\circ(y) \geq \langle z_N^*, y \rangle + w_N^* > N > f^\circ(y).$$

Widerspruch!

2. Fall: $d > 0$.

Wegen $P \subset P^*$ (da $U_1 \subset U$) und der Konvexität von P^* gilt

$$\bigwedge \delta \in [0, 1] \quad (z_\delta^*, w_\delta^*) := \delta(z_N^*, w_N^*) + (1 - \delta)(z_0^*, w_0^*) \in P^*.$$

Für ein beliebiges $\delta \in [0, 1]$ betrachten wir die Funktion $K(t, x, z_\delta^*, \cdot) + w_\delta^*$ auf den Mengen U_1 und V_1 getrennt. Nach Definition von P^* gilt

$$\bigwedge u \in U_1 \quad K(t, x, z_\delta^*, u) + w_\delta^* \leq 0.$$

Wegen $\max\{K(t, x, z_\delta^*, u) + w_\delta^* \in \mathbb{R} \mid u \in V_1\} = -e < 0$ gilt

$$\begin{aligned} \bigwedge u \in V_1 \quad & K(t, x, z_\delta^*, u) + w_\delta^* = \\ &= \delta[K(t, x, z_N^*, u) + w_N^*] + (1 - \delta)[K(t, x, z_0^*, u) + w_0^*] \\ &\leq \delta d + (1 - \delta)(-e). \end{aligned}$$

Wählt man nun speziell $\delta \leq e / (d + e)$, so gilt

$$\bigwedge u \in U \quad K(t, x, z_0^*, u) + w_0^* \leq 0 \quad ,$$

d.h. $S(t, x, z_0^*) + w_0^* \leq 0$, also ist $(z_0^*, w_0^*) \in P$.
Dann muß aber gelten

$$\begin{aligned} f^\circ(y) &\geq \langle z_0^*, y \rangle + w_0^* = \\ &= \delta \langle z_N^*, y \rangle + w_N^* + (1 - \delta) (\langle z_0^*, y \rangle + w_0^*) \\ &> \delta \cdot N + (1 - \delta) f^\circ(y) \\ &> f^\circ(y) \quad . \end{aligned}$$

Dieser Widerspruch zeigt, daß entgegen unserer Annahme
 $y \in \text{cl con } G(U^*)$ gelten muß. **

(1.2.16) Behauptung

Mit der Bezeichnung

$$(a) \quad M^* := \{m \in M_1^+(U) \mid \text{supp}(m) \subset U^*\}$$

gilt

$$(b) \quad y \in \{\hat{G}(m) \in X \mid m \in M^*\} \quad .$$

Beweis:

Nach dem eben Bewiesenen gilt $y \in \text{cl con } G(U^*) =$
 $\{\hat{G}(m) \in X \mid m \in M_1^+(U^*)\}$. Da man $M_1^+(U^*)$ mit
 $\{m \in M_1^+(U) \mid \text{supp}(m) \subset U^*\}$ identifizieren kann, ergibt sich
die Behauptung. **

Um den Beweis von (1.2.11) zu beenden, betrachten wir ein
Maß $m \in M^*$ mit $\hat{G}(m) = y$. Dann gilt nach Definition von
 U^* wegen $\text{supp}(m) \subset U^*$

$$\begin{aligned} 0 &= \int (K(t, x, z_0^*, u) + w^*) m(du) = \\ &= \int \langle z^*, G(u) \rangle m(du) + w^* - \int g(u) m(du) \end{aligned}$$

$$= \langle z^*, y \rangle + w^* - \hat{g}(u) ,$$

und deshalb auch

$$f^\circ(y) \geq \langle z^*, y \rangle + w^* = \hat{g}(u) \geq f_2(y) ,$$

womit alles bewiesen ist. **

Im nächsten Abschnitt werden wir die Eigenschaften der bisher aufgetretenen Korrespondenzen genauer studieren. Dabei wird sich in (1.3.5) ergeben, daß die Funktion $f_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ unterhalbstetig ist. Unter Vorwegnahme dieses auf Hilfsmitteln aus der Theorie der stetigen Korrespondenzen beruhenden Ergebnisses können wir die Gleichheit von f_2 und f° auf ganz X zeigen. Sei dazu $u \in U$ mit $y = G(u)$ gegeben. Dann ist das Dirac-Maß $\varepsilon_u \in M(y)$ und es gilt $\hat{g}(\varepsilon_u) = g(u)$. Daraus folgt für alle $y \in G(U)$

$$\begin{aligned} f_2(y) &= \min\{\hat{g}(m) \in \mathbb{R} \mid m \in M(y)\} \\ &\leq \inf\{\hat{g}(m) \in \mathbb{R} \mid \bigvee u \in U : G(u) = y \wedge m = \varepsilon_u\} \\ &= \inf\{g(u) \in \mathbb{R} \mid u \in U : G(u) = y\} \\ &= f(y) . \end{aligned}$$

Damit ist f_2 eine konvexe unterhalbstetige Funktion, die f auf $G(U)$ minorisiert, und ebenso wie im Beweis zu Satz (1.2.4) folgt daraus, daß gelten muß $f^\circ \geq f_2$. Damit hat man insgesamt den folgenden Satz bewiesen:

(1.2.17) Satz

$$\bigwedge y \in X \quad f(y) = f_2(y) ,$$

d.h. es gilt

$$\begin{aligned} \sup\{\langle z^*, y \rangle + w^* \in \mathbb{R} \mid (z^*, w^*) \in P\} &= \\ &= \min\{\hat{g}(m) \in \mathbb{R} \mid m \in M(y)\} . \end{aligned}$$

Wir beschließen diesen Abschnitt mit der Herleitung einiger Tatsachen, die erst später bei der Gewinnung des Maximumprinzips verwendet werden, aber im direkten Zusammenhang mit den vorausgehenden Überlegungen stehen.

(1.2.18) Lemma

Seien $t \in T$ und $x \in X$ fest gewählt, und sei $y \in \text{dom } f^\circ$. Dann ist $(z^*, w^*) \in R(y)$ genau dann, wenn gilt:

$$(a) \quad z^* \in \partial f^\circ(y) ,$$

$$(b) \quad w^* = f^\circ(y) - \langle z^*, y \rangle .$$

Beweis:

Elementare Folgerung aus der Definition des Subdifferentials. **

(1.2.19) Definition

Seien $t \in T$ und $x \in X$ fest gewählt, und sei $y \in \text{dom } f^\circ$. Ein y darstellendes Maß $m_0 \in M(y)$ nennen wir minimal, wenn gilt

$$\hat{g}(m_0) = f^\circ(y) = \min\{\hat{g}(m) \in \mathbb{R} \mid m \in M(y)\} .$$

Die Menge der minimalen, y darstellenden Maße bezeichnen wir mit

$$N(t, x, y) \quad (\text{oder kürzer } N(y)) .$$

(1.2.20) Satz:

Seien $t \in T$, $x \in X$ und $y \in \text{dom } f^\circ$ fest gewählt. Seien

$(z^*, w^*) \in R(y)$ und $m \in M(y)$ gegeben. Dann ist $m \in N(y)$ genau dann, wenn gilt:

$$(a) \quad \text{supp}(m) \subset U^*$$

mit $U^* = \{u \in U \mid K(z^*, u) + w^* = 0\}$ nach (1.2.15 a) .

Beweis:

Sei $m \in N(y)$. Dann erhält man aus

$$(b) \quad \begin{aligned} \langle z^*, y \rangle + w^* &= f^\circ(y) \\ &= \hat{g}(m) = \int g(u)m(du) \end{aligned}$$

und

$$(c) \quad y = \int G(u)m(du)$$

die Gleichung

$$(d) \quad \int [\langle z^*, G(u) \rangle + w^* - g(u)]m(du) = 0 \quad .$$

Wegen $R(y) \in P$ ist der Integrand von (d) eine nicht-positive Funktion von $u \in U$. Nach BOURBAKI [1965, Chap III, §2, no. 3, prop. 9] folgt dann aus (d) die Inklusion $\text{supp}(m) \subset U^*$. Die Hinlänglichkeit der Bedingung ist klar. **

(1.2.21) Satz

Seien $t \in X$ und $x \in X$ fest gewählt, sei $y \in \text{dom } f^\circ$. Dann ist $(z^*, w^*) \in R(y)$ genau dann, wenn gilt:

$$\bigwedge m \in N(y) \quad B(z^*, m) = -w^* = S(z^*) \quad .$$

Beweis:

Aus der Definition von $R(y)$ ergibt sich sofort, daß

$S(z^*) + w^* = 0$ sein muß. Sei nun $m \in N(y)$ ein beliebiges minimales, y darstellendes Maß, dann gilt:

$$\begin{aligned} -w^* &= \langle z^*, y \rangle - f^\circ(y) \\ &= \int \langle z^*, G(u) \rangle m(du) - \int g(u) m(du) \\ &= E(z^*, m) \quad . \end{aligned}$$

Umgekehrt erhält man aus $-w^* = S(z^*)$ sofort $(z^*, w^*) \in P$. Die Gleichung $E(z^*, m) = -w^*$ liefert für ein $m \in N(y)$

$$\begin{aligned} 0 &= E(z^*, m) + w^* \\ &= \langle z^*, \hat{G}(m) \rangle - \hat{g}(m) + w^* \\ &= \langle z^*, y \rangle - f^\circ(y) + w^* \quad , \end{aligned}$$

d.h. es gilt $\langle z^*, y \rangle + w^* = f^\circ(y)$. **

§3 Stetigkeits- und Meßbarkeitsaussagen für gewisse Korrespondenzen

Die in unseren bisherigen Überlegungen verwendeten Korrespondenzen werden auch in allem Folgenden eine wichtige Rolle spielen. Wir stellen deshalb in diesem Abschnitt einige Aussagen zusammen über die Stetigkeits- und Meßbarkeitseigenschaften dieser Korrespondenzen und erhalten als Folgerung Aussagen über die in (RP.T) auftretenden Funktionen.

Analog zu der im vorhergehenden Paragraphen verwendeten Konvention werden wir jeweils nur die Argumente der betrachteten Korrespondenzen und Funktionen anführen, die nicht fest gewählt sind.

Wir beginnen mit einer Stetigkeitsaussage über die in (1.2.6) definierte Korrespondenz M , bei fest gewähltem $t \in T$, jetzt betrachtet als Korrespondenz $M : X \times X \rightarrow M_1^+(U)$, definiert durch $M := ((x,y) \rightarrow \{m \in M_1^+(U) \mid \hat{G}(x,m) = y\})$. Dabei verwenden wir die folgenden wohlbekannten Ergebnisse.

(1.3.1) Lemma

Seien A und B topologische Räume, B kompakt. Die Korrespondenz $T : A \rightarrow B$ ist genau dann oberhalbstetig, wenn der Graph von T abgeschlossen in $A \times B$ ist.

Beweis: HILDENBRAND [1967] **

(1.3.2) Satz

Seien A und B topologische Räume, $T : A \rightarrow B$ eine kompaktwertige oberhalbstetige Korrespondenz und $d : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ eine oberhalbstetige Abbildung. Dann ist die Abbildung $c : A \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$c(a) := \sup\{d(a,b) \in \mathbb{R} \mid b \in T(a)\}$$

oberhalbstetig.

Beweis: HILDENBRAND [1967] **

(1.3.3) Lemma

Sei $t \in T$ fest gewählt. Die Korrespondenz $M : X \times X \rightarrow M_1^+(U)$, definiert durch

$$\begin{aligned} M(x,y) &:= \{m \in M_1^+(U) \mid \hat{G}(x,m) = y\} \\ &= \{m \in M_1^+(U) \mid \int G(t,x,u)m(du) = y\} \end{aligned} ,$$

ist (Norm,vag) -oberhalbstetig.

Beweis:

Wegen Lemma (1.3.1) genügt es zu zeigen, daß M einen abgeschlossenen Graphen hat. Dazu stellen wir $\text{Gr}(M)$ dar als Durchschnitt über die Urbilder der Null einer Familie von stetigen Funktionen. Da die Abbildung G bezüglich $x \in X$ einer Lipschitzbedingung genügt, gleichmäßig in $t \in T$ und $u \in U$, ist für festes $t \in T$ und alle $u \in U$

$$\|G(x,u) - G(x+h,u)\| \leq L \cdot \|h\| .$$

Daher ist die Abbildung

$$(x \rightarrow G(x, \cdot)) : X \rightarrow K(U, X)$$

stetig, wenn man X mit der Normtopologie versieht und $K(U, X)$ mit der Topologie der glm. Konvergenz. Dann ist für jedes $z^* \in X'$ auch die Abbildung

$$(x \rightarrow \langle z^*, G(x, \cdot) \rangle) : X \rightarrow K(U)$$

stetig bezüglich der Normtopologie auf X und der Topologie der glm. Konvergenz auf $K(U)$. Da $M_1^+(U)$ vag-kompakt ist, erhält man nach BOURBAKI [1965, III. §1 no.9 prop.16, p.61] für jedes $z^* \in X'$ die Stetigkeit der Abbildung

$$Z_{z^*} : X \times X \times M_1^+(U) \rightarrow \mathbb{R},$$

definiert durch

$$Z_{z^*}(x, y, m) := \int \langle z^*, G(x, u) \rangle m(du) - \langle z^*, y \rangle,$$

bezüglich der Normtopologie auf X und der vagen Topologie auf $M_1^+(U)$.

Nun ist wegen der Definition des Vektorintegrals $\hat{G}(x, m)$

$$\begin{aligned} \text{Gr}(M) &= \{(x, y, m) \in X \times X \times M_1^+(U) \mid \hat{G}(x, m) = y\} \\ &= \{(x, y, m) \in X \times X \times M_1^+(U) \mid \bigwedge z^* \in X' \quad \langle z^*, \hat{G}(x, m) \rangle = \\ &= \langle z^*, y \rangle\} = \bigcap \{Z_{z^*}^{-1}(0) \mid z^* \in X'\}, \end{aligned}$$

woraus die Abgeschlossenheit von $\text{Gr}(M)$ folgt. **

(1.3.4) Korollar

Die Abbildung $f_2 : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ist unterhalbstetig bezüglich der Normtopologie auf X .

Beweis:

Mit den gleichen Schlüssen wie oben zeigt man die Stetigkeit der Abbildungen

$$\begin{aligned} (x \rightarrow g(x, \cdot)) : X &\rightarrow K(U), \\ ((x, y, m) \rightarrow \hat{g}(x, m)) : X \times X \times M_1^+(U) &\rightarrow \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dann sind wegen der Oberhalbstetigkeit der Korrespondenz M alle Voraussetzungen des Satzes (1.3.2) erfüllt, und

man erhält die behauptete Unterhalbstetigkeit von f_2 . **

(1.3.5) Korollar

Für festes $t \in T$ und $x \in X$ ist die Abbildung
 $(y \rightarrow f_2(y)) : X \rightarrow \mathbb{R}$ unterhalbstetig bezüglich der Topologie
 $\sigma(X, X')$.

Beweis:

Die Abbildung $f_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ ist unterhalbstetig bezüglich der
Normtopologie und damit wegen der in (1.2.7) bewiesenen
Konvexität auch bezüglich $\sigma(X, X')$. **

Die folgenden Überlegungen zur Meßbarkeit der hier betrachteten
Funktionen und Korrespondenzen werden im nächsten Abschnitt beim Beweis der
Äquivalenz von (RP.T) und (RP.W) zum Tragen kommen.

Wir benötigen zunächst eine Tatsache über spezielle Banachräume.

(1.3.6) Lemma

Sei X ein reflexiver, separabler Banachraum, dann ist X'
ebenfalls reflexiv und separabel.

Beweis:

Die Reflexivität von X' ist wohlbekannt. Da der reflexive
Raum X topologisch und algebraisch isomorph ist zu seinem
Bidual X'' , erhält man die zweite Aussage sofort aus den
folgenden

(1.3.6a) Satz

Ist der Dualraum X' eines Banachraumes X separabel, so ist auch X selbst separabel.

Beweis: HILLE - PHILLIPS [1957, S. 34] **

Wir zitieren noch einige Ergebnisse, die im folgenden mehrfach verwendet werden.

(1.3.7) Satz

Seien $(T, \mathfrak{B})$ ein Meßraum, X und Y separable metrische Räume, $h : T \times X \rightarrow Y$ $\mathfrak{B}$ -meßbar in t für jedes $x \in X$ und stetig in x für jedes $t \in T$. Sei ferner $j : T \rightarrow X$ $\mathfrak{B}$ -meßbar. Dann ist die Abbildung

$$(t \rightarrow h(t, j(t))) : T \rightarrow Y$$

$\mathfrak{B}$ -meßbar.

Beweis: WARGA [1972, Satz I.4.22] **

(1.3.8) Satz

Seien T ein lokalkompakter Raum, E ein lokalkompakter polnischer Raum, λ ein Radonmaß auf T , $\Gamma : T \rightarrow E$ eine λ -meßbare, kompaktwertige Korrespondenz, sei $h : T \times E \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf E für jedes $t \in T$ und λ -meßbar auf T für jedes $e \in E$. Dann ist die Abbildung

$$(t \rightarrow \max\{h(t, e) \in \mathbb{R} \mid e \in \Gamma(t)\})$$

λ -meßbar auf T .

Beweis: CASTAING [1969, Satz 4.5', p. 28] **

(1.3.9) Satz

Seien T ein lokalkompakter Raum, E ein lokalkompakter polnischer Raum, F ein metrisierbarer separabler Raum, λ ein Radonmaß auf T , $\Gamma : T \rightarrow E$ eine λ -meßbare, kompaktwertige Korrespondenz, sei $h : T \times E \rightarrow F$ stetig auf E für jedes $t \in T$ und λ -meßbar auf T für jedes $e \in E$, sei $g : T \rightarrow F$ λ -meßbar. Dann ist die Korrespondenz

$$(t \rightarrow \{e \in \Gamma(t) \mid h(t,e) = g(t)\})$$

λ -meßbar.

Beweis: CASTAING [1969, Satz 4.7', p. 31] **

(1.3.10) Satz

Seien T ein lokalkompakter Raum, E ein lokalkompakter polnischer Raum, F ein metrisierbarer separabler Raum, λ ein Radonmaß auf T , $\Gamma : T \rightarrow E$ eine λ -meßbare, kompaktwertige Korrespondenz, sei $h : T \times E \rightarrow F$ stetig auf E für jedes $t \in T$ und λ -meßbar auf T für jedes $e \in E$, sei $g : T \rightarrow F$ λ -meßbar und es gelte für alle $t \in T$ $g(t) \in h(t, \Gamma(t))$. Dann gibt es eine λ -meßbare Abbildung $s : T \rightarrow E$, so daß für alle $t \in T$ gilt $s(t) \in \Gamma(t)$ und $g(t) = h(t, s(t))$.

Beweis: CASTAING [1969, Korollar 5.1'] **

Für das Folgende benötigen wir weitere Eigenschaften der Funktionen $G : T \times X \times U_0 \rightarrow X$ und $g : T \times X \times U_0 \rightarrow \mathbb{R}$.

(1.3.11) Voraussetzung

Die Funktionen G und g sind beschränkt, d.h. für jede beschränkte Teilmenge $X_0 \subset X$ sind die Bilder von $T \times X_0 \times U_0$ beschränkt.

(1.3.12) Lemma

Seien $\underline{x} \in C[T, X], m \in M_1^+(U_0)$

Dann sind die Abbildungen

$$(t \rightarrow \int_{U_0} G(t, x(t), u) m(du)) : T \rightarrow X$$

und

$$(t \rightarrow \int_{U_0} g(t, x(t), u) m(du)) : T \rightarrow \mathbb{R}$$

Lebesgue-meßbar (dabei ist X versehen mit der schwachen Topologie).

Beweis:

Wegen der Stetigkeit von $\underline{x}$ und der Beschränktheit von G ist die Menge $K_1 := \{G(t, x(t), u) \in X \mid t \in T, u \in U_0\}$ beschränkt in X .

Wegen der Reflexivität von X ist die Menge $B := \text{cl con } K_1$ $\sigma(X, X')$ -kompakt und damit σ -vollständig und separabel.

Wegen der Separabilität von X' (nach (1.3.6)) läßt sich die Einschränkung von $\sigma(X, X')$ auf B nach dem Satz von BISHOP (siehe WARGA [1972, Satz I.3.11]) metrisieren. Wie man dem Beweis dieses Satzes entnimmt, ist B in der von der schwachen Norm auf X gelieferten Metrik beschränkt. Aufgrund der Voraussetzungen in (1.1.1) an G und wegen Satz (1.3.7) sind für jedes $u \in U_0$ $(t \rightarrow G(t, x(t), u)) : T \rightarrow B$ meßbar und für jedes $t \in T$ $(u \rightarrow G(t, x(t), u)) : U_0 \rightarrow B$ stetig. Analog zu den Beweisen der Sätze (1.4.21) und (1.5.25) in WARGA [1972] erhält man daraus, daß die Abbil-

dung $(t \rightarrow G(t, x(t), \cdot)) : T \rightarrow K[U, B]$ (auf $K[U, B]$ die Topologie der glm. Konvergenz) meßbar ist. Wie in Satz (1.5.27) in WARGA [1972] folgt dann die Meßbarkeit der Abbildung

$$(t \rightarrow \int_U G(t, x(t), u) m(du)) : T \rightarrow B$$

für jedes $m \in M_1^+(U_0)$.

Für die Abbildung g geht der Beweis genauso. **

(1.3.13) Lemma

Die Menge $M_1^+(U_0)$ ist ein kompakter polnischer Raum in der vagen Topologie.

Beweis:

Nach CHOQUET [1969, Satz 12.10] ist die Menge $M^+(U_0)$ der positiven Radonmaße auf U_0 wegen der Kompaktheit von U_0 metrisierbar in der vagen Topologie. Das gilt dann natürlich ebenfalls für die vag-kompakte Menge $M_1^+(U_0) \subset M^+(U_0)$. Wegen der Kompaktheit ist $M_1^+(U_0)$ auch vollständig und separabel in der vagen Topologie. **

(1.3.14) Satz

Die Korrespondenz

$$L := (t \rightarrow \{m \in M_1^+(U_0) \mid \text{supp}(m) \subset U(t)\}) : T \rightarrow M_1^+(U_0)$$

ist oberhalbstetig.

Beweis:

Bekanntlich (siehe etwa DIEROLF [1973, Satz (6.2)]) ist eine Korrespondenz L genau dann oberhalbstetig, wenn für jede abgeschlossene Menge M auch $L^-[M]$ abgeschlossen ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} L(t) &= \{m \in M_1^+(U_0) \mid \text{supp}(m) \subset U(t)\} = \\ &= \{m \in M_1^+(U_0) \mid \bigwedge l \in K(U_0) (\text{supp}(l) \cap U(t) = \emptyset \Rightarrow \langle m, l \rangle = 0)\} = \\ &= M_1^+(U_0) \cap \left(\bigcap \{ \langle \cdot, l \rangle^{-1}(0) \mid l \in K(U) \wedge \text{supp}(l) \cap U(t) = \emptyset \} \right) = \\ &= \bigcap \{ \langle \cdot, l \rangle^{-1}(0) \cap M_1^+(U_0) \mid l \in K(U) \wedge \text{supp}(l) \cap U(t) = \emptyset \} . \end{aligned}$$

Sei nun $M = \text{cl } M \subset M_1^+(U_0)$. Seien $t_n \in L^-[M] (n \in \mathbb{N})$ mit $t_n \rightarrow t_0$. Dann ist zu zeigen

$$\begin{aligned} M \cap \left(\bigcap \{ \langle \cdot, l \rangle^{-1}(0) \cap M_1^+(U_0) \mid l \in K(U_0) \wedge \text{supp}(l) \cap U(t_0) = \emptyset \} \right) \cap \\ \cap \{ \langle \cdot, l \rangle^{-1}(0) \cap M_1^+(U_0) \cap M \mid l \in K(U_0) \wedge \text{supp}(l) \cap U(t_0) = \emptyset \} \neq \emptyset . \end{aligned}$$

Wegen der Kompaktheit von $M_1^+(U_0)$ und der Abgeschlossenheit von $\langle \cdot, l \rangle^{-1}(0) \cap M_1^+(U_0) \cap M$ für jedes $l \in K(U_0)$ genügt es zu zeigen, daß für je endlich viele $l_i \in K(U)$ mit $\text{supp}(l_i) \cap U(t_0) = \emptyset$ der obige Durchschnitt nicht leer ist. Seien also $l_1, \dots, l_p \in K(U)$ mit $\text{supp}(l_i) \cap U(t_0) = \emptyset$ ausgewählt. Dann gilt

$$U(t_0) \subset \bigcap \{ \text{supp}(l_i) \mid i = 1, \dots, p \} =: W$$

und W ist offen. Wegen der Oberhalbstetigkeit der Korrespondenz $U : T \rightarrow U_0$ gilt dann

$$\forall N \in \mathbb{N} \wedge n \geq N : U(t_n) \subset W .$$

Also ist $\text{supp}(l_i) \cap U(t_n) = \emptyset$ ($i = 1, \dots, p, n \geq N$) und wegen $t_n \in L^-[M] (n \in \mathbb{N})$ folgt

$$\begin{aligned} \bigcap \{ \langle \cdot, l_i \rangle^{-1}(0) \cap M_1^+(U_0) \cap M \mid i = 1, \dots, p \} \\ \supset \bigcap \{ \langle \cdot, l \rangle^{-1}(0) \cap M_1^+(U_0) \cap M \mid l \in K(U) \wedge \text{supp}(l) \cap U(t_n) = \emptyset \} \neq \emptyset \end{aligned}$$

für $n \geq N$. Damit ist $t_0 \in L^-[M]$. **

(1.3.15) Korollar

Die Korrespondenz L aus Satz (1.3.14) ist meßbar.

Beweis:

Nach Lemma (1.3.1) ist $\text{Gr}(L)$ abgeschlossen und damit Element des σ -Körpers $\mathfrak{B} \times \mathfrak{U}$ ($\mathfrak{B}$ Borelmengen von T , $\mathfrak{U}$ Borelmengen von $M_1^+(U_0)$), denn T und $M_1^+(U_0)$ sind kompakt und metrisierbar ($M_1^+(U_0)$ nach (1.3.13)). Daraus folgt nach IOFFE-LEVIN [1972, Satz von DEBREU-CASTAING] die Meßbarkeit von L . **

(1.3.16) Korollar

Seien $\underline{x} \in C[T, X]$ und $\underline{y} \in L_1[T, X]$. Dann ist die Korrespondenz

$$\begin{aligned} (t \rightarrow M(t, x(t), y(t))) : T &\rightarrow M_1^+(U_0), \\ M(t, x(t), y(t)) &:= \{m \in M_1^+(U(t)) \mid \hat{G}(t, x(t), m) = y(t)\} \end{aligned}$$

meßbar.

Beweis:

Nach Lemma (1.3.12) ist die Abbildung

$$(t \rightarrow \hat{G}(t, x(t), m)) : T \rightarrow X$$

meßbar für jedes $m \in M_1^+(U_0)$. Nach BOURBAKI [1965, III §3 no. 4 prop 9 cor.] ist die Abbildung

$$(m \rightarrow \hat{G}(t, x(t), m)) : M_1^+(U_0) \rightarrow X$$

(vag, σ)-stetig. Wegen der Voraussetzung (1.3.11) spielt sich wieder alles in einer schwach-kompakten Menge B ab. Damit erfüllen die Korrespondenz $L := (t \rightarrow \hat{G}(t, x(t), m))$

und y alle Voraussetzungen von Satz (1.3.9) , der die
Behauptung liefert. **

(1.3.17) Korollar

Seien $\underline{x} \in C[T, X]$.

Dann ist die Korrespondenz

$$(t \rightarrow N(t, x(t), y(t))) : T \rightarrow M_1^+(U_0)$$

meßbar.

Beweis:

Anwendung von (1.3.16) auf die Korrespondenz

$$(t \rightarrow M(t)) \quad . \quad **$$

§4 Ein Selektionssatz; Äquivalenz von (RP.W) und (RP.T)

Aus den im §3 bereitgestellten Hilfsmitteln gewinnen wir einen Selektionssatz, der besagt, daß man eine meßbare Funktion $\underline{m} : T \rightarrow M_1^+(U_0)$ finden kann mit $m(t) \rightarrow M(t, x(t), y(t))$, die das Minimum in der Definition von f_2 punktweise realisiert. Diese Tatsache ist der Schlüssel zur Äquivalenz von (RP.W) und (RP.T).

(1.4.1) Satz

Für die Funktionen $\underline{x} \in C[T, X]$ und $\underline{y} \in L_1[T, X]$ gelte

$$y(t) \in \text{cl con } G(t, x(t), U(t)) \quad \wedge t \in T.$$

Dann existiert eine meßbare Abbildung

$$\underline{m} : T \rightarrow M_1^+(U_0),$$

so daß für alle $t \in T$ gilt,

$$\begin{aligned} m(t) &\in M(t, x(t), y(t)) \quad , \\ \hat{g}(t, x(t), m(t)) &= f_2(t, x(t), y(t)) \\ &= \min\{\hat{g}(t, x(t), m) \in \mathbb{R} \mid m \in M(t, x(t), y(t))\} \quad . \end{aligned}$$

Beweis:

Da die Abbildung

$$((t, m) \rightarrow \hat{g}(t, x(t), m)) : T \times M_1^+(U_0) \rightarrow \mathbb{R}$$

für jedes $t \in T$ vag-stetig auf $M_1^+(U_0)$ und für jedes $m \in M_1^+(U_0)$ meßbar ((1.3.12)) ist und da ferner die Korrespondenz $(t \rightarrow M(t, x(t), y(t)))$ meßbar ist, liefert Satz (1.3.8) die Meßbarkeit der Abbildung $(t \rightarrow \min\{\hat{g}(t, x(t), m) \in \mathbb{R} \mid m \in M(t, x(t), y(t))\})$.

Anwendung von Satz (1.3.9) auf diese Abbildung und die Korrespondenz $(t \rightarrow M(t, x(t), y(t)))$ liefert dann die Behauptung. **

Nun ist es nicht mehr schwer, die von langer Hand vorbereitete Äquivalenz der beiden in §1 konstruierten Relaxed Control Probleme zu zeigen.

(1.4.2) Satz

Der Wert von (RP.W) ist gleich dem Wert von (RP.T), und jede Lösung $(\underline{x}, \underline{y})$ von (RP.T) liefert eine Lösung von (RP.W).

Beweis:

Wir bezeichnen den Wert von (RP.W) mit W , den von (RP.T) mit I . Sei $\underline{m} \in S$ eine zulässige Kontrolle von (RP.W) mit

$$\int_T \hat{g}(t, x(t), m(t)) dt < W + \varepsilon \quad (\varepsilon \geq 0).$$

Wir setzen für alle $t \in T$

$$y(t) := \hat{G}(t, x(t), m(t)).$$

Dann gilt wegen $m(t) \in M_1^+(U(t))$ für fast alle $t \in T$

$$y(t) \in \text{cl con } G(t, x(t), U(t)) = \text{dom } f^\circ(t, x(t), \cdot)$$

und

$$m(t) \in M(t, x(t), y(t)).$$

Da ferner gilt $\dot{x}(t) = \hat{G}(t, x(t), m(t))$, ist $\underline{y}$ eine zulässige Kontrolle für (RP.T). Da außerdem für fast alle $t \in T$ gilt

$$\begin{aligned} & \hat{g}(t, x(t), m(t)) \geq \\ & \geq \min\{\hat{g}(t, x(t), m) \in \mathbb{R} \mid m \in M(T, x(t), y(t))\} \\ & = f^\circ(t, x(t), y(t)) . \end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned} I & \leq \int_T f^\circ(t, x(t), y(t)) dt \leq \\ & \leq \int_T \hat{g}(t, x(t), m(t)) dt \leq W + \varepsilon . \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, ergibt sich $I \leq W$.

Sei nun andererseits $(\underline{x}, \underline{y})$ eine Lösung von (RP.T) . Dann gilt für fast alle $t \in T$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) & = y(t) \in \text{dom } f^\circ(t, x(t), \cdot) \\ & = \text{cl con } G(t, x(t), U(t)) . \end{aligned}$$

Die von Satz (1.4.1) gelieferte Selektion $\underline{m} : T \rightarrow M_1^+(U_0)$ erfüllt dann für fast alle $t \in T$

$$\begin{aligned} \underline{m}(t) & \in M_1^+(U(t)) , \text{ d.h. } \underline{m} \in S_0 , \\ \dot{x}(t) & = y(t) = \hat{g}(t, x(t), \underline{m}(t)) , \\ \hat{g}(t, x(t), \underline{m}(t)) & = f^\circ(t, x(t), y(t)) , \end{aligned}$$

und man erhält durch Integration

$$\begin{aligned} I & = \int_T f^\circ(t, x(t), y(t)) dt = \\ & = \int_T \hat{g}(t, x(t), \underline{m}(t)) dt \geq W . \end{aligned}$$

Damit ist alles bewiesen. **

Das Hauptinteresse von Satz (1.4.2) liegt in der Tatsache begründet, daß wir damit insbesondere die Existenz von Lösungen von (RP.W) auf die Existenz von Lösungen von (RP.T) zurückgeführt haben.

Bisher wurde in den Arbeiten über (RP.W) stets vorausgesetzt, daß der Phasenraum X endliche Dimension hat. Aufgrund des

Äquivalenzsatzes hat man nun die Existenzaussagen für (RP.T) bei unendlich-dimensionalem Phasenraum auch für (RP.W) zur Verfügung.

Da ein kompakter Hausdorffraum schon metrisierbar ist, bedeutet die Vorgabe einer Metrik auf dem Kontrollbereich keine neue Voraussetzung. Zusätzlich zu den von IOFFE-TICHOMIROV [1968] benötigten Voraussetzungen haben wir neben der Stetigkeit der Abbildungen G und g bezüglich der Variablen $u \in U$ verwendet, daß der separable Banachraum X (der Phasenraum) reflexiv ist und daß die Korrespondenz $(t \rightarrow U(t) : T \rightarrow U_0)$ oberhalbstetig ist und nicht nur einen Borelschen Graphen hat.

2. Kapitel: Richtungsableitung von max-Funktionen

In diesem Kapitel werden wir eine Darstellung für die Richtungsableitung von Funktionen herleiten, die von der Struktur von f° aus (RP.T) sind. Unsere Überlegungen gehen aus von Arbeiten von DEMYANOV [1968 - 1974], DEMYANOV-MALOZEMOV [1971] und PEVNIY [1971], die in endlichdimensionalen Räumen die Richtungsableitungen von Funktionen etwa der Form

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} h(x, y, z)$$

betrachten und sie zur Charakterisierung der Lösungen von Optimierungsaufgaben mit derartigen Zielfunktionen verwenden. Im nächsten Kapitel werden die Ergebnisse dieses Abschnittes dazu dienen, für spezielle Probleme der Art (RP.T), die gewisse Regularitätsforderungen erfüllen, ein Analogon zum Maximumprinzip von PONTRYAGIN (siehe etwa PONTRYAGIN, et al. [1964] oder GIRSANOV [1972]) herzuleiten.

Um unnötig komplizierte Formeln zu vermeiden, verwenden wir in diesem Kapitel neue Bezeichnungen und spezialisieren die hier durchgeführten Überlegungen erst später auf die Funktion f° .

§1 "Linearisierung" von Korrespondenzen

Wir beginnen mit einer genauen Formulierung des betrachteten Problems:

(2.1.1) Gegeben seien:

(a) zwei normierte Räume A und B

- (b) ein kompakter Hausdorffraum D ,
- (c) eine Funktion $h : A \times B \times D \rightarrow \mathbb{R}$,
 stetig auf $A \times B \times D$, konvex in $b \in B$, stetig
 partiell differenzierbar nach $a \in A$ und $b \in B$,
 gleichmäßig für alle $d \in D$ mit partiellen Ableitungen
 $D_1 h(a_0, b_0, d)(a)$ und $D_2 h(a_0, b_0, d)(b)$, die
 stetig sind in d für jede Wahl der anderen Variablen,
- (d) eine Funktion $k : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$,
 stetig auf $A \times B$, stetig partiell differenzierbar
 nach $a \in A$ und $b \in B$ mit partiellen Ableitungen
 $D_1 k(a_0, b_0)(a)$ und $D_2 k(a_0, b_0)(b)$.

(2.1.2) Definition

$$(a) \quad V(a) := \{b \in B \mid \bigwedge d \in D \ h(a, b, d) \leq 0\}$$

definiert eine Korrespondenz $V : A \rightarrow B$.

$$(b) \quad l(a) := \sup\{k(a, b) \in \mathbb{R} \mid b \in V(a)\}$$

definiert eine Abbildung $l : A \rightarrow B$.

$$(c) \quad Z(a) := \{b \in B \mid k(a, b) = l(a)\}$$

definiert eine Korrespondenz $Z : A \rightarrow B$.

$$(d) \quad T(a, b) := \{d \in D \mid h(a, b, d) = 0\}$$

definiert eine Korrespondenz $T : A \times B \rightarrow D$.

Gesucht ist nun die rechtsseitige Richtungsableitung von l
 im Punkt $a_0 \in A$ in Richtung $a \in A$, die wir mit

$$(e) \quad D^+ l(a_0)(a)$$

bezeichnen.

Man wird nun versuchen, diese Richtungsableitung zurückzuspielen auf die partiellen Ableitungen von k in Punkten $(a_0, b_0) \in A \times B$ für geeignete Werte $b_0 \in B$. Dabei ist es naheliegend die $b_0 \in Z(a_0)$ zu betrachten. Ferner muß man zur Differentiationsrichtung $a \in A$ noch Richtungen $b \in B$ finden, auf die die partielle Ableitung von k nach b anzuwenden ist. Hier werden sicher die b mit $b_0 + \alpha b \in V(a_0 + \alpha a)$ für $\alpha \in [0, \alpha_0]$ zu berücksichtigen sein. Die entsprechende Richtungsapproximation der Korrespondenz V wird man dann durch die Funktion h bzw. ihre partiellen Ableitungen ausdrücken.

(2.1.3) Definition

Seien $a_0, a \in A$, $b_0 \in V(a_0)$.

$$(a) \quad \gamma(a_0, a, b_0) := \{b \in B \mid \forall \alpha > 0 \wedge \alpha \in [0, \alpha_0]: b_0 + \alpha b \in V(a_0 + \alpha a)\},$$

$$(b) \quad \Gamma(a_0, a, b_0) := \text{cl } \gamma(a_0, a, b_0).$$

Die Menge $\gamma(a_0, a, b_0)$ ist konvex, aber im allgemeinen kein Kegel.

Eine notwendige Bedingung für $b \in \Gamma(a_0, a, b_0)$ läßt sich leicht angeben. Sei dazu $b \in \gamma(a_0, a, b_0)$. Dann gilt für alle $\alpha \in [0, \alpha_0]$ mit geeignetem $\alpha_0 > 0$ $b_0 + \alpha b \in V(a_0 + \alpha a)$. woraus nach Definition von V folgt $h(a_0 + \alpha a, b_0 + \alpha b, d) \leq 0$ für jedes $d \in D$. Taylorentwicklung um (a_0, b_0) liefert

$$\begin{aligned} 0 &\geq h(a_0 + \alpha a, b_0 + \alpha b, d) = \\ &= h(a_0, b_0, d) + \end{aligned}$$

$$+ \alpha [D_1 h(a_0, b_0, d)(a) + D_2 h(a_0, b_0, d)(b)] \\ + o(\alpha) \quad (\text{glm. in } d \text{ nach Voraussetzung})$$

Betrachtet man nun die Elemente $d \in D$ mit $h(a_0, b_0, d) = 0$,
so erhält man nach Division durch α und Grenzübergang
 $\alpha \rightarrow 0$:

$$\bigwedge d \in T(a_0, b_0) \\ 0 \geq D_1 h(a_0, b_0, d)(a) + D_2 h(a_0, b_0, d)(b) \quad . \quad **$$

(2.1.4) Definition

Seien a_0 , $a \in A$, $b_0 \in V(a)$.

$$(a) \quad \Delta(a_0, a, b_0) := \\ = \begin{cases} \{b \in B \mid d \in T(a_0, b_0) \\ D_1 h(a_0, b_0, d)(a) + D_2 h(a_0, b_0, d)(b) \leq 0\} \quad , \\ \text{falls } T(a_0, b_0) = \emptyset \\ B \quad \text{sonst} \end{cases}$$

(2.1.5) Satz

Seien a_0 , $a \in A$, $b_0 \in V(a_0)$. Es existiere ein
 $b_1 \in B$ mit

$$(a) \quad \sup\{h(a_0, b_1, d) \in \mathbb{R} \mid d \in D\} < 0 \quad ^1).$$

Dann gilt

$$(b) \quad \Gamma(a_0, a, b_0) = \Delta(a_0, a, b_0) \quad .$$

¹⁾ Bedingungen dieser Art werden in der Theorie der nicht-linearen Optimierung sehr häufig verwendet und werden "Slater - Bedingung" genannt.

Beweis:

Trivialerweise ist für $T(a_0, b_0) = \emptyset$ auch $\Gamma(a_0, a, b_0) = B$.
Für $T(a_0, b_0) \neq \emptyset$ zeigen wir zunächst, daß $\Delta(a_0, a, b_0) \neq \emptyset$
gilt. Zu $b \in \Delta(a_0, a, b_0)$ konstruieren wir dann Elemente
 b_μ ($\mu > 0$), die zum Slaterpunkt b_1 hin "verdreht" sind
und in $\gamma(a_0, a, b_0)$ liegen. Daraus ergibt sich dann die Be-
hauptung.

Sei also $T(a_0, b_0) \neq \emptyset$ und $\mu > 0$. Dann gilt für $d \in T(a_0, b_0)$
und $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} & \alpha[D_1h(a_0, b_0, d)(\mu a) + D_2h(a_0, b_0, d)(b_1 - b_0)] + o(\alpha) \\ &= h(a_0, +\alpha\mu a, b_0 + \alpha(b_1 - b_0), d) - h(a_0, b_0, d) \\ &\leq \alpha h(a_0 + \alpha\mu a, b_1, d) + (1 - \alpha)h(a_0 + \alpha\mu a, b_0, d) \\ &\quad - h(a_0, b_0, d) \\ &= \alpha[h(a_0, b_1, d) + \alpha D_1h(a_0, b_1, d)(\mu a) + o(\alpha)] \\ &\quad + (1 - \alpha)[h(a_0, b_0, d) + \alpha D_1h(a_0, b_0, d)(\mu a) + o(\alpha)] \\ &\quad - h(a_0, b_0, d) \\ &= \alpha[h(a_0, b_1, d) - h(a_0, b_0, d)] \\ &\quad + \alpha^2[D_1h(a_0, b_1, d)(\mu a) - D_1h(a_0, b_0, d)(\mu a)] \\ &\quad + \alpha D_1h(a_0, b_0, d)(\mu a) + o(\alpha) \end{aligned}$$

Division durch α und Grenzübergang $\alpha \rightarrow 0+$ liefert

$$\begin{aligned} & D_1h(a_0, b_0, d)(\mu a) + D_2h(a_0, b_0, d)(b_1 - b_0) \\ &\leq h(a_0, b_1, d) - h(a_0, b_0, d) \\ &\quad + D_1h(a_0, b_0, d)(\mu a) \end{aligned}$$

Für hinreichend kleines $\mu > 0$ gilt dann wegen der Slater-
bedingung für $d \in T(a_0, b_0)$

$$D_1h(a_0, b_0, d)(\mu a) + D_2h(a_0, b_0, d)(b_1 - b_0) \leq 0$$

Division dieser Ungleichung durch μ liefert

$$(b_1 - b_0) / \mu \in \Delta(a_0, a, b_0) \quad .$$

Sei nun $b \in \Delta(a_o, a, b_o)$. Dann gibt es wegen der Stetigkeit von $D_1h(a_o, b_o, \cdot)(a)$ und $D_2h(a_o, b_o, \cdot)(b)$ zu jedem $\lambda > 0$ eine offene Menge $T^\lambda \supset T(a_o, b_o)$, so daß für alle $d \in T^\lambda$ gilt

$$(c) \quad D_1h(a_o, b_o, d)(a) + D_2h(a_o, b_o, d)(b) \leq \lambda.$$

Für den Rest dieses Beweises schreiben wir für den (noch sehr oft auftretenden) Ausdruck

$$D_1h(a_o, b_o, d)(a) + D_2h(a_o, b_o, d)(b)$$

der Kürze halber $[\quad]$.

Wegen der Stetigkeit von $h(a_o, b_o, \cdot)$ gilt

$$(d) \quad \bigwedge \lambda > 0 \quad \bigvee \varepsilon_\lambda > 0 \quad \bigwedge \varepsilon \in (0, \varepsilon_\lambda] \\ \bigwedge d \in T_\varepsilon(a_o, b_o) := \{d \in D \mid -\varepsilon \leq h(a_o, b_o, d) \leq 0\} \\ [\quad] \leq \lambda$$

Wir setzen nun

$$(e) \quad \eta := -\sup\{h(a_o, b_1, d) \in \mathbb{R} \mid d \in D\} > 0,$$

und betrachten für ein beliebiges, aber festes $\mu > 0$ den Wert

$$(f) \quad \lambda' := (\mu\eta)/8.$$

Wegen (d) gibt es ein $\varepsilon' = \varepsilon'(\lambda) > 0$, so daß für alle $\varepsilon \in [0, \varepsilon']$ gilt:

$$(g) \quad \sup\{[\quad] \in \mathbb{R} \mid d \in T_\varepsilon(a_o, b_o)\} \leq \lambda'.$$

Da h bezüglich $b \in B$ konvex ist und in (a_o, b_1) nach Voraussetzung die Slaterbedingung (a) erfüllt, erhält man aus der Definition von $T_\varepsilon(a_o, b_o)$ (vgl. (d)) für

$\varepsilon \in [0, \eta/2]$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \bigwedge d \in T_\varepsilon(a_o, b_o) \quad D_2 h(a_o, b_o, d)(b_1 - b_o) \\ (h) \quad & \leq h(a_o, b_1, d) - h(a_o, b_o, d) \leq -\eta + \varepsilon \leq -\eta/2 \\ & = -4\lambda'/\mu < 0 \end{aligned}$$

Wir setzen nun $b_\mu := b + \mu(b_1 - b_o)$ und erhalten für $\alpha > 0$ und jedes $d \in D$

$$\begin{aligned} h(a_o + \alpha a, b_o + \alpha b_\mu, d) &= h(a_o, b_o, d) \\ &+ \alpha [D_1 h(a_o, b_o, d)(a) + D_2 h(a_o, b_o, d)(b_\mu)] + o(\alpha) \\ &\leq \alpha [\quad] + \mu \alpha D_2 h(a_o, b_o, d)(b_1 - b_o) + o(\alpha) \end{aligned}$$

Für $\varepsilon \in [0, \min\{\varepsilon', \eta/2\}]$ erhält man daraus wegen (g) und (h) für $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} & \bigwedge d \in T_\varepsilon(a_o, b_o) \\ h(a_o + \alpha a, b_o + \alpha b_\mu, d) &\leq \alpha \lambda' - 4\alpha \lambda' + o(\alpha) \\ &= -3\alpha \lambda' + o(\alpha) \end{aligned}$$

Also gibt es $\alpha' > 0$ mit

$$(1) \quad \bigwedge \alpha \in [0, \alpha'] \quad \bigwedge d \in T_\varepsilon(a_o, b_o) \\ h(a_o + \alpha a, b_o + \alpha b_\mu, d) \leq -2\alpha \lambda' \leq 0$$

Für $d \in T' := D \setminus T_\varepsilon(a_o, b_o)$ gilt $h(a_o, b_o, d) < -\varepsilon$. Wegen der Produktstetigkeit von (h) ist die Abbildung

$$h_1 := ((\alpha, d) \rightarrow h(a_o + \alpha a, b_o + \alpha b_\mu, d)) : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig und deshalb gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein $\alpha'' > 0$ mit

$$\begin{aligned} & \bigwedge \alpha \in [0, \alpha''] \quad \bigwedge d \in T' \\ h(a_o + \alpha a, b_o + \alpha b_\mu, d) &< -\varepsilon/2 < 0 \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir mit (i) und (j) gezeigt

$$\begin{aligned} & \forall \alpha_0 > 0 \quad \wedge \alpha \in [0, \alpha_0] \\ & \quad b_0 + \alpha b_\mu \in V(a_0 + \alpha a) , \\ \text{d.h. } & b_\mu \in \gamma(a_0, a, b_0) . \end{aligned}$$

Also ist $\gamma(a_0, a, b_0) \neq \emptyset$.

Wegen $b_\mu \rightarrow b$ für $\mu \rightarrow 0+$ folgt aus $b_\mu \rightarrow \gamma(a_0, a, b_0)$ dann $b \in \Gamma(a_0, a, b_0)$.

Damit ist alles bewiesen. **

(2.1.7) Korollar

Seien a_0 , $a \in A$ und sei die Slaterbedingung (2.1.5 a) erfüllt. Dann gilt für alle Folgen $\{b'_k \in B \mid k \in \mathbb{N}\}$ und $\{\alpha_k \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{N} , \alpha_k > 0 \text{ mit}$

$$\begin{aligned} & b'_k \rightarrow b_0 , \quad \alpha_k \rightarrow 0+ \quad (k \rightarrow \infty) , \\ & b'_k \in V(a_0 + \alpha_k a) \quad k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

auch $b_0 \in V(a_0)$, und es existiert eine Folge $b_k \in \Gamma(a_0, a, b_0)$ mit

$$\begin{aligned} & \alpha_k b'_k \rightarrow \theta \in B \quad (k \rightarrow \infty) , \\ & b'_k = b_0 + \alpha_k b_k + o(\alpha_k) . \end{aligned}$$

(2.1.8) Definition

Seien a_0 , $a \in A$ gegeben. Wenn für eine Korrespondenz $V : A \rightarrow B$ die Aussage von Lemma (2.1.7) gilt, sagen wir kurz, V lasse im Punkt $a_0 \in A$ eine Linearisierung in Richtung a zu.

Beweis von (2.1.7) :

$b_0 \in V(a_0)$ ist klar wegen der Stetigkeit von h . Wir

betrachten zunächst die Hilfsfolge $b''_k := (b'_k - b_0)/\alpha_k$.
Für $d \in T(a_0, b_0)$ erhält man durch Entwicklung um (a_0, b_0)
wegen $h(a_0, b_0, d) = 0$ und $b'_k \in V(a_0 + \alpha_k a)$

$$\begin{aligned} 0 &\leq h(a_0 + \alpha_k a, b_0 + \alpha_k b''_k, d) = \\ &= \alpha_k [D_1 h(a_0, b_0, d)(a) + D_2 h(a_0, b_0, d)(b''_k)] + o(\|\alpha_k b''_k\|) \end{aligned}$$

und daraus wegen $\alpha_k b''_k \rightarrow \theta$

$$D_1 h(a_0, b_0, d)(a) + D_2 h(a_0, b_0, d)(b''_k) \leq \varepsilon_k$$

mit $\varepsilon_k := o(\|\alpha_k b''_k\|)/\alpha_k \rightarrow 0$.

Ferner gilt wegen der Konvexität von h bezüglich $b \in B$
für $d \in T(a_0, b_0)$

$$\begin{aligned} D_2 h(a_0, b_0, d)(b_1 - b_0) &\leq h(a_0, b_1, d) - h(a_0, b_0, d) \\ &= h(a_0, b_1, d) \leq \sup\{h(a_0, b_1, d) \in \mathbb{R} \mid d \in D\} := \eta. \end{aligned}$$

Da h in (a_0, b_1) der Salterbedingung genügt, ist $\eta < 0$.
Nun kann man die gesuchte Folge definieren durch

$$b_k := b''_k + |\varepsilon_k| \cdot (b_1 - b_0)/\mu$$

mit $\mu := -\eta > 0$ und erhält für $d \in T(a_0, b_0)$

$$\begin{aligned} D_1 h(a_0, b_0, d)(a) + D_2 h(a_0, b_0, d)(b_k) &= \\ &= D_1 h(a_0, b_0, d)(a) + D_2 h(a_0, b_0, d)(b''_k) \\ &\quad + (|\varepsilon_k|/\mu) \cdot D_2 h(a_0, b_0, d)(b_1 - b_0) \leq \\ &\leq \varepsilon_k - |\varepsilon_k| \leq 0. \end{aligned}$$

Also gilt nach Satz (2.1.6)

$$b_k \in \Delta(a_0, b_0, d) = \Gamma(a_0, b_0, d).$$

Damit hat die Folge $b_k (k \in \mathbb{N})$ alle behaupteten Eigenschaften. **

§2 Richtungsableitung von Max-Funktionen

(2.2.1) Satz

Seien $a_0, a \in A$. Die Funktion $l: A \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig in $a_0 \in A$. Es mögen Folgen $b'_k \in B_1, \alpha_k > 0$ ($k \in \mathbb{N}$) existieren mit

$$\begin{aligned} b'_k &\rightarrow b_0 \in B, \quad \alpha_k \rightarrow 0+, \\ b'_k &\in Z(a_0 + \alpha_k a) \quad (k \in \mathbb{N}), \\ p(\alpha_k) &\rightarrow \overline{\lim}_{\alpha \rightarrow 0+} p(\alpha), \end{aligned}$$

wobei $p(\alpha) := (l(a_0 + \alpha a) - l(a_0))/\alpha$ gesetzt ist. Dann existiert die Richtungsableitung $D^+l(a_0)(a)$ der Funktion l im Punkt $a_0 \in A$ in Richtung $a \in A$, und es gilt:

$$\begin{aligned} D^+l(a_0)(a) &= \\ (a) \quad &= \sup_{b_0 \in Z(a_0)} \sup_{b \in T(a_0, a, b_0)} \{D_1k(a_0, b_0)(a) \\ &+ D_2k(a_0, b_0)(b)\}. \end{aligned}$$

Beweis:

Den Ausdruck auf der rechten Seite von (2.2.1 a) bezeichnen wir mit Q , den Klammersausdruck (ohne die beiden Suprema) mit $g(b_0, b)$. Der Beweis wird erbracht durch Herleitung der Ungleichungen

$$\underline{\lim}_{\alpha \rightarrow 0+} p(\alpha) \geq Q \geq \overline{\lim}_{\alpha \rightarrow 0+} p(\alpha).$$

Seien $b_0 \in Z(a_0)$, $b \in \gamma(a_0, a, b_0)$. Dann gilt nach Definition von $\gamma(a_0, a, b_0)$

$$\forall \alpha_0 > 0 \quad \wedge \alpha \in [0, \alpha_0] \quad b_0 + \alpha b \in V(a_0 + \alpha a),$$

woraus man wegen

$$l(a_0 + \alpha a) \geq k(a_0 + \alpha a, b_0 + \alpha b) =$$

$$\begin{aligned}
 &= k(a_0, b_0) + \alpha [D_1 k(a_0, b_0)(a) + D_2 k(a_0, b_0)(b)] + o(\alpha) \\
 &= l(a_0) + \alpha [D_1 k(a_0, b_0)(a) + D_2 k(a_0, b_0)(b)] + o(\alpha)
 \end{aligned}$$

die Beziehung

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+} p(\alpha) \geq g(b_0, b) \text{ erh\u00e4lt.}$$

Da b_0 und b beliebig gew\u00e4hlt waren, erh\u00e4lt man daraus die erste der Ungleichungen.

F\u00fcr die zweite Ungleichung betrachten wir die nach Korollar (2.1.7) konstruierte Folge $b_k \in I(a_0, a, b_0)$. F\u00fcr diese gilt dann wegen der Voraussetzung \u00fcber b'_k

$$\begin{aligned}
 l(a_0 + \alpha_k a) - l(a_0) &= \\
 &= k(a_0 + \alpha_k a, b_0 + \alpha_k b'_k) - k(a_0, b_0) \\
 &= \alpha_k [D_1 k(a_0, b_0)(a) + D_2 k(a_0, b_0)(b'_k)] + o(\alpha_k) \\
 &= \alpha_k [D_1 k(a_0, b_0)(a) + D_2 k(a_0, b_0)(b_k)] + o(\alpha_k).
 \end{aligned}$$

Wegen $b_k \in I(a_0, a, b_0)$ folgt daraus

$$\begin{aligned}
 \overline{\lim}_{\alpha \rightarrow 0+} p(\alpha) &= \lim_{k \rightarrow \infty} p(\alpha_k) \leq \\
 &\leq \sup_{b \in I} g(b_0, b) \leq Q. \quad **
 \end{aligned}$$

3. Kapitel: Ein Maximumprinzip für (RP.T)

In diesem Kapitel werden wir ein Maximumprinzip für das Relaxed Control Problem (RP.T) herleiten. Dazu werden zunächst die Hilfsüberlegungen aus dem 2. Kapitel auf den Integranden f° von (RP.T) angewendet, um für festes $t \in T$ eine Darstellung der Richtungsableitung $D^+ f^\circ(t, x_0(t), y_0(t))(x(t), y(t))$ zu erhalten. Diese wird unter Ausnutzung der speziellen Struktur von f° umgeformt in einen Ausdruck, der beide Komponenten $x(t)$ und $y(t)$ der Differentiationsrichtung explizit enthält, was nach der Darstellung nach (2.2.1) ja nicht der Fall ist. Dazu sind natürlich Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsvoraussetzungen an die Funktionen $G : T \times X \times U \rightarrow X$ und $g : T \times X \times U \rightarrow \mathbb{R}$ zu stellen, die über (1.1.1) hinausgehen. Als nächstes wird aus der "punktweisen" Darstellung der Richtungsableitung von f° eine Darstellung der Richtungsableitung der Zielfunktion F° von (RP.T) hergeleitet. Unter Zuhilfenahme von Regularitätsforderungen an eine Lösung $(\underline{x}_0, \underline{y}_0)$ von (RP.T) erhält man dann aus einer der formal einfachen Struktur von (RP.T) entsprechenden Variationsungleichung ein Maximumprinzip für (RP.T). Die einschneidendste hierbei benötigte Voraussetzung ist $\dim X < \infty$. Jedoch ist auch in diesem Fall ein Maximumprinzip für (RP.T) bisher nicht bekannt.

§1 Richtungsableitung des Integranden f° von (RP.T)

(3.1.1)

Für fest gewähltes $t \in T$ übertragen wir die Ergebnisse des 2. Kapitels auf die in (RP.T) gegebene Situation. Dabei haben wir zu setzen:

- (a) $A := X \times X \ni (x, y)$
- (b) $B := X' \times \mathbb{R} \ni (z^*, w^*)$,

- (c) $D := U(=U(t)) \ni u$, ¹⁾
- (d) $h(x, y, z^*, w^*, u) := K(x, z^*, u) + w^*$
 $= \langle z^*, G(x, u) \rangle + w^* - g(x, u)$,
- (e) $V(x, y) := P(x, y) = P(x)$
- (f) $T(x, y, z^*, w^*) := U(x, y, z^*, w^*) = U(x, z^*, w^*)$
 $= \{u \in U \mid h(x, y, z^*, w^*, u) = 0\}$,
- (g) $k(x, y, z^*, w^*) := \langle z^*, y \rangle + w^*$,
- (h) $l(x, y) := \sup \{k(x, y, z^*, w^*) \in \mathbb{R} \mid (z^*, w^*) \in P(x)\}$
 $= f^\circ(x, y)$,
- (i) $Z(x, y) := R(x, y)$
 $= \{(z^*, w^*) \in P(x) \mid \langle z^*, y \rangle + w^* = f^\circ(x, y)\}$.

Um die Ergebnisse von Kapitel 2 auf f° anwenden zu können, führen wir weitere Voraussetzungen ein.

(3.1.2) Voraussetzung

Die Abbildung $G : T \times X \times U_0 \rightarrow X$ ist für jede Wahl von $t \in T$ und $u \in U_0$ nach x Frechetdifferenzierbar, gleichmäßig bezüglich t und u , d.h. es gilt:

$$\bigwedge t \in T \bigwedge u \in U_0$$

$$\|G(t, x_0 + x, u) - G(t, x_0, u) - D_x G(t, x_0, u)(x)\|$$

$$= o(\|x\|) \text{ .}$$

Für jede Wahl von $t \in T$, x_0 , $x \in X$ ist die Abbildung

$$(u \rightarrow D_x G(t, x_0, u)(x)) : U_0 \rightarrow X$$

¹⁾ Es wird weiterhin von der Konvention Gebrauch gemacht, nur die nicht festgehaltenen Variablen von Funktionen und Korrespondenzen aufzuführen.

stetig bezüglich $\sigma(X, X')$.

Die Abbildung $g : T \times X \times U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ hat die entsprechenden Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften. **

Nach (1.1.1) ist die Abbildung $G(t, x, \cdot) : U_0 \rightarrow X$ $\sigma(X, X')$ -stetig für jede Wahl von $t \in T$ und $x \in X$. Wie man dem Beweis von Satz (2.1.5) entnimmt, brauchen wir noch etwas mehr.

(3.1.3) Voraussetzung

Für jede Wahl von $t \in T$, x_0 , $x \in X$ ist die Abbildung

$$((r, u) \rightarrow G(x_0 + rx, u)) : [-1, +1] \times U_0 \rightarrow X$$

stetig bezüglich $\sigma(X, X')$.

Unter diesen Voraussetzungen hat die Abbildung

$$h : X \times X \times X' \times \mathbb{R} \times U_0 \rightarrow \mathbb{R}$$

alle im 2. Kapitel verwendeten Eigenschaften und man erhält aus Satz (2.1.5)

(3.1.4) Folgerung

Seien $(z_0^*, w_0^*) \in R(x_0, y_0)$ und $(x, y) \in X \times X$ gegeben. Dann gilt mit der Abkürzung $U^* := U(x_0, z_0^*, w_0^*)$:

$$\begin{aligned} \Gamma(x_0, y_0, x, y, z^*, w^*) &= \\ &= \{ (z^*, w^*) \in X' \times \mathbb{R} \mid \bigwedge u \in U(x_0, z_0^*, w_0^*) \\ &\langle z^*, G(x_0, u) \rangle + w^* \\ &+ \langle z_0^*, D_x G(x_0, u)x \rangle - \langle D_x g(x_0, u), x \rangle \leq 0 \} . \quad ** \end{aligned}$$

Für alles Folgende betrachten wir eine feste Lösung $(\underline{x}_0, \underline{y}_0) \in C \times L_1$ des Problems (RP.T) und formulieren die zusätzlich benötigten Eigenschaften von f° als Regularitätsvoraussetzungen an diese Lösung. Derartige Regularitätsbedingungen werden stets benötigt, wenn für die Lösungen von Optimierungsaufgaben nichttriviale notwendige Bedingungen hergeleitet werden sollen. Beispiele derartiger Regularitätsforderungen findet man etwa bei BOLTJANSKII [1973], DEMYANOV-RUBINOV [1966], GIRSANOV [1972], HOFFMANN [1968] und [1971], LEVIN [1968] und WARGA [1972].

(3.1.5) Voraussetzung

Sei $t \in T$ fest gewählt. Die Abbildung

$$f^\circ(t, \dots) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

ist stetig im Punkt (x_0, y_0) .

Für jede Wahl $(x, y) \in X \times X$ existieren Folgen

$$(z_k^*, w_k^*) \in X' \times \mathbb{R} \text{ und } \alpha_k \in \mathbb{R}_+ \text{ mit}$$

$$(z_k^*, w_k^*) \in R(x_0 + \alpha_k x, y_0 + \alpha_k y) ,$$

$$(z_k^*, w_k^*) \rightarrow (z_0^*, w_0^*) \in X' \times \mathbb{R} ,$$

$$\alpha_k \rightarrow 0+ ,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p(\alpha_k) = \overline{\lim}_{\alpha \rightarrow 0+} p(\alpha) ,$$

wobei gesetzt wird

$$p(\alpha) := (f^\circ(x_0 + \alpha x, y_0 + \alpha y) - f^\circ(x_0, y_0))/\alpha . \quad **$$

Nun können wir das Ergebnis von Kapitel 2 auf den Integranden f° von (RP.T) anwenden.

(3.1.6) Folgerung

Sei $t \in T$ fest gewählt. Dann gilt im Punkt $(x_0, y_0) := (x_0(t), y_0(t))$ mit den Abkürzungen $R := R(t, x_0, y_0)$ und $\Gamma := \Gamma(x_0, y_0, x, y, z^*, w^*)$ für die Richtungsableitung von f°

$$D^+ f^\circ(x_0, y_0)(x, y) = \sup_{(z^*, w^*) \in R} \sup_{(z^*, w^*) \in \Gamma} \langle z^*, y \rangle + \langle z^*, y_0 \rangle + w^* . \quad **$$

Diese Darstellung der Richtungsableitung von f° hat jedoch den Nachteil, daß nur die eine Komponente der Differentiationsrichtung $(x, y) \in X \times X$ explizit auftritt. Die Komponente x geht nur indirekt ein, da Γ von ihr abhängt. Aufgrund der speziellen Struktur von f° kann man ähnlich wie im Paragraphen (1.2) eine Darstellung angeben, in der beide Komponenten der Differentiationsrichtung (x, y) explizit auftreten. Dabei verwenden wir die am Ende von Paragraph (1.2) zusammengestellten Tatsachen. Diese Überlegungen erfordern weitere zusätzliche Voraussetzungen an die Funktionen G und g , die denen entsprechen, die beim Beweis der Approximierbarkeit der Lösungen des Relaxed Control Problems durch Minimalfolgen des Ausgangsproblems (OC) etwa bei KROTOV - GURMAN [1973] und WARGA [1961] verwendet werden.

(3.1.7) Voraussetzung

Es existieren Funktionen $g_1, g_2, g_3 \in L_\infty[T]$, so daß für alle $t \in T$ und $x_0 \in X$ gilt:

- (a) $|g(t, x_2, u)| \leq g_1(t) \cdot \|x_0\| \wedge u \in U_0$,
- (b) $\|D_x g(t, x_0, u)\| \leq g_2(t) \cdot \|x_0\| \wedge u \in U_0$,
- (c) $\|D_x G(t, x_0, u)\| \leq g_3(t) \cdot \|x_0\| \wedge u \in U_0$;

mit $C := (\|x_0\| + \|y_0\|)$ gilt für alle $t \in T$

$$(d) \quad f^\circ(t, x, y) < \infty \wedge (x, y) \in K[(x_0(t), y_0(t)), C] ,$$

wobei $K[(x_0, y_0), C] := \{(x, y) \in X \times X \mid \|x_0 - x\| + \|y_0 - y\| \leq C\}$ ist;

für jede feste Wahl von $x_0, y_0 \in X$, $t \in T$ sind die Abbildungen

$$(e) \quad (u \rightarrow D_x G(t, x_0, u)(x)) : U_0 \rightarrow X ,$$

$$(f) \quad (u \rightarrow D_x g(t, x_0, u)) : U_0 \rightarrow X' ,$$

schwach stetig;

für jede Wahl von $x_0 \in X$ und $u \in U_0$ sind die Abbildungen

$$(t \rightarrow D_x G(t, x_0, u)) : U_0 \rightarrow L(X) ,$$

$$(t \rightarrow D_x g(t, x_0, u)) : U_0 \rightarrow X' ,$$

meßbar. **

Zur Abkürzung der Formeln führen wir noch folgende Funktion ein:

(3.1.8) Definition

$$H_1(t, x, z^*, u) := D_x G(t, x, u) * z^* - D_x g(t, x, u) .$$

Wegen (3.1.7 d) existiert für jedes feste $t \in T$ $(z^*, w^*) \in R(x_0, y_0)$, wegen (3.1.7 b) und (3.1.7 c) ist die Menge $\{H_1(t, x_0, z^*, u) \in X' \mid u \in U_0\}$ in X' beschränkt, also in einer wegen der Reflexivität von X' schwach kompakten und damit schwach vollständigen Kugel in X' enthalten. Also ist (BOURBAKI [1965]) für jedes Radonmaß m auf U^*

$$\begin{aligned} \hat{H}_1(t, x_0, z^*, m) &:= \\ &:= \int H_1(t, x_0, z^*, u) m(du) \in X' . \end{aligned}$$

Nach (3.1.4) sind die Elemente $(z^*, w^*) \in \Gamma(x_0, y_0, x, y, z^*, w^*)$

charakterisiert durch die Bedingung:

$$\bigwedge u \in U(x_0, y_0, z_0^*, w_0^*) \\ \langle H_1(x_0, z_0^*, u), x \rangle + \langle z_0^*, G(x_0, u) \rangle + w_0^* \leq 0 \quad .$$

Integration dieser Ungleichung bezüglich eines minimalen, y_0 darstellenden Maßes $m \in N(x_0, y_0)$ liefert wegen (vgl. (1.2.20)) $\text{supp}(m) \in U^*$

$$\langle z_0^*, y_0 \rangle + w_0^* \leq \langle -H_1(x_0, z_0^*, m), x \rangle \quad .$$

Mit den gleichen Schlüssen wie in Paragraph (1.2) erhält man insgesamt:

$$\sup_{(z^*, w^*) \in T} \langle z^*, y_0 \rangle + w^* \leq \\ \leq \min_{m \in N(x_0, y_0)} \langle -\hat{H}_1(x_0, z_0^*, m), x \rangle \quad .$$

Um hier sogar auf Gleichheit schließen zu können, betrachten wir ein Element $(z^*, w^*) \in T$ mit

$$\langle z_1^*, y_0 \rangle + w_1^* = \sup_{(z^*, w^*) \in T} \langle z^*, y_0 \rangle + w^* \quad .$$

Genauso wie in (1.2.15) erhält man

$$y_0 \in \text{cl con } G(x_0, U_1) \quad ,$$

$$\text{mit } U_1 := \{u \in U^* \mid \langle H_1(x_0, z_0^*, u), x \rangle + \langle z_0^*, G(x_0, u) \rangle + w_0^* = 0\} \quad ;$$

und daraus die Existenz eines Maßes $m_0 \in M(x_0, y_0)$ mit $\text{supp}(m_0) \subset U_1 \subset U^*$.

Nach (1.2.20) gilt dann sogar $m_0 \in N(x_0, y_0)$.

Integration bezüglich m_0 ergibt

$$\begin{aligned} \langle z^*, y_o \rangle + w^* &= \langle z^*, \hat{G}(x_o, m) \rangle + w^* \\ &= \langle -\hat{H}_1(x_o, z^*, m), x \rangle \\ &> \min_{m \in N(x_o, y_o)} \langle -\hat{H}_1(x_o, z^*, m), x \rangle . \end{aligned}$$

Die Existenz des oben verwendeten Elementes $(z_1^*, w_1^*) \in T$ sichern wir durch eine verschärfte Regularitätsvoraussetzung.

(3.1.8) Voraussetzung

Für jede Wahl von $(z_o^*, w_o^*) \in R(x_o, y_o)$ gilt:

$$y_o \in \text{int} \parallel . \parallel \text{cl con } G(x_o, U(x_o, z_o^*, w_o^*)) .$$

Insgesamt haben wir damit die gewünschte Darstellung für die Richtungsableitung von f° .

(3.1.9) Satz

$$\begin{aligned} D^+ f^\circ(x_o, y_o)(x, y) &= \\ &= \sup_{(z_o^*, w_o^*) \in R(x_o, y_o)} \min_{m \in N(x_o, y_o)} \{ \langle z_o^*, y \rangle + \\ &+ \langle -\hat{H}_1(x_o, z_o^*, m), x \rangle \} . \quad ** \end{aligned}$$

Da die Komponente w_o^* des Elementes $(z_o^*, w_o^*) \in R$ hier nicht mehr auftaucht, können wir nach (1.2.18) in der obigen Darstellung das Supremum über $z_o^* \in \partial f^\circ(y_o)$ nehmen. Der so gewonnene Ausdruck für die Richtungsableitung von f° hat den Vorteil, daß das Supremum und das Infimum über Mengen zu nehmen sind, die nur von x_o und y_o abhängen, nicht aber von der Differentiationsrichtung (x, y) . Da die Mengen $\partial f^\circ(y_o)$ und $N(x_o, y_o)$ beide konvex und kompakt sind, liegt es nahe ein Minimax-Theorem anzuwenden; das wird es gestatten,

die Menge der "Abstiegsrichtungen" noch besser in den Griff zu bekommen, als es mit den bisherigen Darstellungen möglich ist. Bei SION [1958] findet man das folgende Minimax-Theorem:

(3.1.10) Satz

Seien M und N konvexe Teilmengen von linearen topologischen Räumen, von denen eine kompakt ist. Sei $f : M \times N \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf M konkav und oberhalbstetig und auf N konvex und unterhalbstetig ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sup_{m \in M} \inf_{n \in N} f(m, n) &= \\ = \inf_{n \in N} \sup_{m \in M} f(m, n) & \quad ** \end{aligned}$$

Auf unseren Fall angewandt, erhält man

(3.1.11) Folgerung

$$\begin{aligned} D^+ f^\circ(x_0, y_0)(x, y) &= \\ = \min_{m \in N(x_0, y_0)} \max_{z_0^* \in \partial f^\circ(y_0)} \langle z_0^*, y \rangle & \\ + \langle -\hat{H}_1(x_0, z_0^*, m), x \rangle & \quad ** \end{aligned}$$

§2 Richtungsableitung der Zielfunktion F° von (RP, T) :

(3.2.1)

Neben der fest gewählten Lösung $(\underline{x}_0, \underline{y}_0) \in C \times L_1$ betrachten wir ein weiteres fest gewähltes Element $(\underline{x}, \underline{y}) \in C \times L_1$, die Differentiationsrichtung der zu betrachtenden Richtungsableitung. Wegen der Voraussetzung (3.1.7 d) gilt dann für hinreichend kleines $\alpha > 0$ und alle $t \in T$

$$(a) \quad y_0(t) + \alpha y(t) \in Q(t, x_0(t) + \alpha x(t))$$

Da die Variable $t \in T$ im folgenden als Argument in allen Funktionen auftreten wird, schreiben wir zur Abkürzung

$$(b) \quad f^\circ(t, \underline{x}, \underline{y}) := f^\circ(t, x(t), y(t)) \quad ^1)$$

und analog in allen anderen Fällen, wo keine Unklarheit zu befürchten ist; da alle beteiligten Funktionen fest gewählt sind, werden wir nur das Argument $t \in T$ aufführen, z.B.

$$(c) \quad N(t) := N(t, x_0(t), y_0(t)) \quad .$$

(3.2.2)

Wir betrachten zunächst für festes $t \in T$ ein Element $z^* \in \partial f^\circ(t, \underline{x}_0, \underline{y}_0)$ ²⁾. Für $y \in X$ mit

1) Bei den im folgenden auftretenden Ausdrücken der Art $f^\circ(t, \underline{x}, y)$ steht $\underline{x}$ für den Wert der Funktion $\underline{x}$ an der Stelle t und y für ein einfaches Element aus dem Raum X .

2) Hier ist das Subdifferential natürlich bezüglich der Variablen $y \in X$ im Punkt $y_0(t)$ zu bilden.

$y - y_0(t) \in \text{dom } f^\circ(t, x_0(t), \cdot)$ gilt wegen (3.1.7 a)

$$\begin{aligned} |\langle z^*, y - y_0(t) \rangle| &\leq |f^\circ(t, \underline{x}_0, y) - f^\circ(t, \underline{x}_0, y_0)| \\ &= \left| \min_{m \in M(t, \underline{x}_0, \dot{y})} \hat{g}(t, \underline{x}_0, m) - \min_{m \in M(t)} \hat{g}(t, \underline{x}_0, m) \right| \\ &\leq 2 \cdot \min_{m \in M_1(U(t))} |\hat{g}(t, \underline{x}_0, m)| \\ &\leq 2 \cdot g_1(t) \cdot \|x_0(t)\| . \end{aligned}$$

Da X reflexiv ist, gibt es nach (3.1.7 d) zu jedem $z^* \in \partial f^\circ(t, \underline{x}_0, y_0)$ ein $y \in X$ mit

$$\langle z^*, y - y_0(t) \rangle = \|z^*\| .$$

Damit hat man insgesamt mit $C := 2/c$

$$\|z^*\| \leq C \cdot g_1(t) \cdot \|x_0(t)\| . \quad **$$

(3.2.3) Satz

$$\begin{aligned} D^+ F^\circ(\underline{x}_0, \underline{y}_0)(\underline{x}, \underline{y}) &= \int_T D^+ f^\circ(t, \underline{x}_0, \underline{y}_0)(\underline{x}, \underline{y}) \, dt \\ &= \int_T \left[\min_{m \in N(t)} \max_{z^* \in \partial f^\circ(t, \underline{x}_0, \underline{y}_0)} \{ \langle z^*, y(t) \rangle + \right. \\ &\quad \left. + \langle -\hat{H}_1(t, \underline{x}_0, z^*, m), x(t) \rangle \} \right] dt . \end{aligned}$$

Beweis:

Aus (3.1.11) erhält man für fast alle $t \in T$

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0+} [(f^\circ(t, \underline{x}_0 + \alpha \underline{x}, \underline{y}_0 + \alpha \underline{y}) - f^\circ(t, \underline{x}_0, \underline{y}_0)) / \alpha] \\ = D^+ f^\circ(t, \underline{x}_0, \underline{y}_0)(\underline{x}, \underline{y}) . \end{aligned}$$

Da die in den eckigen Klammern auftretenden Funktionen meßbar sind, - das folgt aus Satz (1.4.1) -, ist auch

$D^+ f^\circ(t, \underline{x}_0, \underline{y}_0)(\underline{x}, \underline{y})$ als Funktion von $t \in T$ meßbar.

Um die Vertauschung des Grenzüberganges $\alpha \rightarrow 0+$ mit der Integration über das Intervall T zu rechtfertigen, be-

trachten wir zunächst die Terme $D^+ f^\circ(t, \underline{x}_0, \underline{y}_0)(\underline{x}, \underline{y})$ und $f^\circ(t, \underline{x}_0 + \alpha \underline{x}, \underline{y}_0 + \alpha \underline{y}) - f^\circ(t, \underline{x}_0, \underline{y}_0)$.

Aufgrund der Voraussetzungen (3.1.7 b) und (3.1.7 c) sowie der Abschätzung aus (3.2.2) erhält man:

$$\begin{aligned} & |D^+ f^\circ(t, \underline{x}_0, \underline{y}_0)(\underline{x}, \underline{y})| \\ & \leq C \cdot g_1(t) \cdot \|\underline{x}_0\| \cdot \|\underline{y}(t)\| \\ & + \|\underline{x}(t)\| \cdot [g_2(t) \cdot \|\underline{x}_0(t)\| \cdot C \cdot g_1(t) \cdot \|\underline{x}_0(t)\| + g_2(t) \cdot \|\underline{x}_0(t)\|] \\ & \leq C_1 \cdot \|\underline{x}_0(t)\| \cdot [\|\underline{y}(t)\| \cdot g_1(t) + \\ & + \|\underline{x}(t)\| \cdot (g_2(t) \cdot g_1(t) \cdot \|\underline{x}_0(t)\| + g_2(t))] := r(t) \end{aligned}$$

Zur Abschätzung des zweiten Ausdrucks gehen wir davon aus, daß es $m_1 \in M(t, \underline{x}_0 + \alpha \underline{x}, \underline{y}_0 + \alpha \underline{y})$ und $m_0 \in M(t, \underline{x}_0, \underline{y}_0)$ gibt, für die gilt:

$$\begin{aligned} & f^\circ(t, \underline{x}_0 + \alpha \underline{x}, \underline{y}_0 + \alpha \underline{y}) - f^\circ(t, \underline{x}_0, \underline{y}_0) \\ & = g(t, \underline{x}_0 + \alpha \underline{x}, m_1) - g(t, \underline{x}_0, m_0) := A \end{aligned}$$

Diese Größe läßt sich in Abhängigkeit von ihrem Vorzeichen folgendermaßen abschätzen:

1. Fall $A \geq 0$:

Sei $m_2 \in M(t, \underline{x}, \underline{y})$, dann gilt

$m_0 + \alpha m_2 \in M(t, \underline{x}_0 + \alpha \underline{x}, \underline{y}_0 + \alpha \underline{y})$ und daher wegen (1.1.1 d) und (1.3.11)

$$\begin{aligned} & 0 \leq f^\circ(t, \underline{x}_0 + \alpha \underline{x}, \underline{y}_0 + \alpha \underline{y}) - f^\circ(t, \underline{x}_0, \underline{y}_0) \\ & \leq \hat{g}(t, \underline{x}_0 + \alpha \underline{x}, m_0 + \alpha m_2) - \hat{g}(t, \underline{x}_0, m_0) \\ & \leq |\hat{g}(t, \underline{x}_0 + \alpha \underline{x}, m_0 + \alpha m_2) - \hat{g}(t, \underline{x}_0, m_0 + \alpha m_2)| \\ & + |\hat{g}(t, \underline{x}_0, m_0 + \alpha m_2) - \hat{g}(t, \underline{x}_0, m_0)| \\ & \leq \alpha \|\underline{x}(t)\| + \alpha |\hat{g}(t, \underline{x}_0, m_2)| \\ & \leq \alpha [\|\underline{x}(t)\| + M] \end{aligned}$$

2. Fall $A < 0$:

Sei $m_2 \in M(t, -\underline{x}, -\underline{y})$, dann ist $m_1 + \alpha m_2 \in M(t, \underline{x}_0, \underline{y}_0)$, und es gilt:

$$\begin{aligned}
 0 &< f^\circ(t, \underline{x}_0, \underline{y}_0) - f^\circ(t, \underline{x}_0 + \alpha \underline{x}, \underline{y}_0 + \alpha \underline{y}) \\
 &\leq \hat{g}(t, \underline{x}_0, m_1 + \alpha m_2) - \hat{g}(t, \underline{x}_0 + \alpha \underline{x}, m_1) \\
 &\leq |\hat{g}(t, \underline{x}_0, m_1 + \alpha m_2) - \hat{g}(t, \underline{x}_0 + \alpha \underline{x}, m_1 + \alpha m_2)| \\
 &\quad + |\hat{g}(t, \underline{x}_0 + \alpha \underline{x}, m_1 + \alpha m_2) - \hat{g}(t, \underline{x}_0 + \alpha \underline{x}, m_1)| \\
 &\leq \alpha \cdot \|\underline{x}(t)\| + \alpha |\hat{g}(t, \underline{x}_0 + \alpha \underline{x}, m_2)| \\
 &\leq \alpha \cdot [\|\underline{x}(t)\| + M] .
 \end{aligned}$$

(Die Existenz des Maßes m_2 ist in beiden Fällen durch die Voraussetzung (3.1.7 d) gesichert). Setzt man noch $s(t) := \|\underline{x}(t)\| + M$, dann gilt für hinreichend kleine $\alpha > 0$

$$\begin{aligned}
 &\int_T |(f^\circ(t, \underline{x}_0 + \alpha \underline{x}, \underline{y}_0 + \alpha \underline{y}) - f^\circ(t, \underline{x}_0, \underline{y}_0))/\alpha \\
 &\quad - D^+ f^\circ(t, \underline{x}_0, \underline{y}_0)(\underline{x}, \underline{y})| dt \\
 &\leq \int_T (r(t) + s(t)) dt .
 \end{aligned}$$

Anwendung des Satzes von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz liefert dann die Behauptung. **

Die Darstellung von $D^+ F^\circ(\underline{x}_0, \underline{y}_0)(\underline{x}, \underline{y})$ nach Satz (3.2.3) ist für unsere Zwecke noch nicht brauchbar. Um diese Richtungsableitung zur Herleitung des Maximumprinzips verwenden zu können, müssen wir auf geeignete Weise eine Vertauschung der Integration über das Intervall T mit den Operationen "min - max" erreichen. Dazu greifen wir wieder auf Selektionsätze zurück; um ihre Anwendbarkeit zu ermöglichen, benötigen wir weitere Stetigkeitseigenschaften der Funktionen G und g . Vor allem aber müssen wir für alles weitere voraussetzen, daß der Phasenraum X endliche Dimension hat.

(3.2.4) Voraussetzung

$$\dim X < \infty .$$

(3.2.5) Voraussetzung

Für jede feste Wahl von $t \in T$ und $u \in U_0$ sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} (x \rightarrow D_x G(t, x, u)) &: X \rightarrow L(X) \quad , \\ (x \rightarrow D_x g(t, x, u)) &: X \rightarrow X' \end{aligned}$$

stetig.

Mit den schon mehrfach verwendeten Schlüssen erhält man aus dieser Voraussetzung zusammen mit (3.1.7)

(3.2.6) Lemma

Die Abbildungen

$$\begin{aligned} ((t, u) \rightarrow D_x G(t, x_0(t), u)(x(t))) &: T \times U_0 \rightarrow X \quad , \\ ((t, u) \rightarrow D_x g(t, x_0(t), u)) &: T \times U_0 \rightarrow X' \end{aligned}$$

sind stetig bezüglich $u \in U_0$ und meßbar bezüglich $t \in T$. **

(3.2.7)

Auf die gleiche Weise wie früher erhält man daraus dann für jedes $t \in T$ die Stetigkeit der Abbildungen

$$\begin{aligned} (m \rightarrow \int [D_x G(t, x_0(t), u)x(t)]m(du)) &: M(U_0) \rightarrow X \quad , \\ (m \rightarrow \int D_x g(t, x_0(t), u)m(du)) &: M(U_0) \rightarrow X' \quad , \end{aligned}$$

wobei $m(U_0)$ versehen ist mit der Topologie der kompakten Konvergenz. Da diese aber (BOURBAKI [1965]) auf vag-beschränkten Mengen, also insbesondere auf $M_1^+(U_0)$, mit der vagen Topologie zusammenfällt, ist die Einschränkung dieser Abbil-

dungen auf $M_1^+(U_0)$ vag-stetig. Weiter ist dann die Abbildung

$$\begin{aligned} ((m, z^*) &\rightarrow \langle z^*, \int [D_x G(t, x_0(t), u) x(t)] m(du) \rangle) \\ &: M_1^+(U_0) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

produktstetig, und daraus folgt wegen der Kompaktheit von $\partial f^\circ(t, \underline{x}_0, \underline{y}_0)$ (MOREAU [1966/67]) die Stetigkeit der Abbildung

$$\begin{aligned} (a) \quad (m &\rightarrow \max_{z^* \in \partial f^\circ(t)} \langle z^*, \int [D_x G(t, x_0(t), u) x(t)] m(du) \rangle) \\ &: M_1^+(U_0) \rightarrow \mathbb{R} . \end{aligned}$$

Da die Abbildung $(t \rightarrow D^+ f^\circ(t, \underline{x}_0, \underline{y}_0)(\underline{x}, \underline{y}))$ schon als meßbar erkannt ist (Beweis von Satz (3.2.3)), ebenso wie die Korrespondenz $(t \rightarrow N(t))$ (vgl. (1.3.17)), erfüllen diese zusammen mit der Abbildung

$$\begin{aligned} ((t, m) &\rightarrow \max_{z^* \in \partial f^\circ(t)} \{ \langle z^*, y(t) \rangle \\ &+ \langle -\hat{H}_1(t, \underline{x}_0, z^*, m), x(t) \rangle \}) : T \times M_1^+(U_0) \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

alle Voraussetzungen von Satz (1.3.10). Also existiert eine meßbare Selektion $\underline{m} : T \rightarrow M_1^+(U_0)$, so daß für alle $t \in T$ gilt

$$\begin{aligned} (b) \quad m(t) &\in N(t) , \\ \max_{z^* \in \partial f^\circ(t)} &\{ \langle z^*, y(t) \rangle + \langle -\hat{H}_1(t, \underline{x}_0, z^*, m(t)), x(t) \rangle \} \\ &= D^+ f^\circ(t, \underline{x}_0, \underline{y}_0)(\underline{x}, \underline{y}) . \end{aligned}$$

Um auch auf die Existenz einer Selektion $\underline{z}^* : T \rightarrow X'$ von $\partial f^\circ(t, \underline{x}_0, \underline{y}_0)$ schließen zu können, haben wir noch die Meßbarkeit der Korrespondenz $(t \rightarrow \partial f^\circ(t, \underline{x}_0, \underline{y}_0))$ nachzuweisen. Dazu zeigen wir zuerst die Meßbarkeit der Korrespondenz $(t \rightarrow P(t, \underline{x}_0))$ und dann die von $(t \rightarrow R(t, \underline{x}_0, \underline{y}_0))$, woraus

dann wegen der Stetigkeit der Projektion die Meßbarkeit von $(t \rightarrow \partial f^0(t, \underline{x}_0, \underline{y}_0))$ folgt.

Die Abbildung

$$((t, z^*, w^*, u) \rightarrow \langle z^*, G(t, x(t), u) \rangle + w^*)$$

ist wegen der Voraussetzungen an G meßbar in $t \in T$ und stetig in $u \in U_0$ und in $(z^*, w^*) \in X' \times R$. Nach Satz (1.3.8) ist dann die Abbildung

$$v := ((t, z^*, w^*) \rightarrow \max_{u \in U(t)} \{\langle z^*, G(t, x_0(t), u) \rangle + w^*\})$$

meßbar in $t \in T$ und konvex und unterhalbstetig in (z^*, w^*) als Maximum über stetige, lineare Abbildungen. Ferner ist für alle $t \in T$

$$\text{dom } v(t, \dots) = X' \times \mathbb{R}.$$

Auf die Abbildung $((t, u) \rightarrow g(t, x(t), u))$ angewandt, sichert Satz (1.3.8) auch die Meßbarkeit der Abbildungen

$$(t \rightarrow \min_{u \in U(t)} g(t, x(t), u)).$$

Nach IOFFE-LEVIN [1972, Anhang 2] ist dann die Korrespondenz

$$(t \rightarrow P(t, x(t))) : T \rightarrow X' \times \mathbb{R}$$

meßbar wegen der Beziehung

$$\begin{aligned} P(t, x(t)) &= \{(z^*, w^*) \in X' \times R \mid S(t, x(t), z^*) \quad w^* \leq 0\} \\ &= \{(z^*, w^*) \in X' \times \mathbb{R} \mid \max_{u \in U(t)} [\langle z^*, G(t, x(t), u) \rangle + w^*] \\ &\leq \min_{u \in U(t)} g(t, x(t), u)\}. \end{aligned}$$

Analog dazu erhält man (wieder nach IOFFE-LEVIN [1972]) für jede Folge $r_n \rightarrow 0+$ die Meßbarkeit jeder der Korrespondenzen

$$(t \rightarrow \Gamma_n(t) := \{(z^*, w^*) \in X' \times \mathbb{R} \mid \langle z^*, y_0(t) \rangle + w^* > f^\circ(t, \underline{x}_0, \underline{y}_0) - r_n\}) .$$

Nach CASTAING [1969, Korollar zu Satz 3.3] folgt daraus wegen

$$R(t) = P(t, x(t)) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(t) \right)$$

die Meßbarkeit der Korrespondenz $\underline{R}$.

Damit erfüllen auch die Korrespondenzen $\underline{R}$ und die Abbildungen

$$\begin{aligned} ((t, z^*) \rightarrow [\langle z^*, y(t) \rangle + \langle -\hat{H}_1(t, \underline{x}_0, z^*, \underline{m}), x(t) \rangle]) , \\ ((t, z^*) \rightarrow \max_{z^* \in \partial f^\circ(t)} [\quad]) \end{aligned}$$

die Voraussetzungen von Satz (1.3.10) , und man kann auf die Existenz einer meßbaren Selektion $\underline{z}^* : T \rightarrow X'$ mit $z^*(t) \in \partial f^\circ(t)$ schließen, die für alle $t \in T$ das Maximum realisiert.

Insgesamt haben wir damit eine weitere Darstellung für $D^+F^\circ(\underline{x}_0, \underline{y}_0)(\underline{x}, \underline{y})$ erhalten.

(3.2.8) Folgerung

Setzt man zur Abkürzung

$$\begin{aligned} N &:= \{ \underline{m} : T \rightarrow M_1^+(U_0) \mid \underline{m} \text{ meßbar,} \\ &\quad m(t) \in N(x_0(t), y_0(t)) \quad \text{f.ü.} \} , \\ D &:= \{ \underline{z}^* \in L_1[T, X] \mid z^*(t) \in \partial f^\circ(t) \quad \text{f.ü.} \} , \end{aligned}$$

so gilt:

$$D^+F^{\circ}(\underline{x}_0, \underline{y}_0)(\underline{x}, \underline{y}) = \\ = \min_{\underline{m} \in N} \max_{\substack{\underline{z}^* \in D \\ \forall T}} [\langle \underline{z}^*(t), \underline{y}(t) \rangle \\ + \langle -\hat{H}_1(t, \underline{x}_0, \underline{z}^*, \underline{m}), \underline{x} \rangle] dt \quad . \quad **$$

Bemerkung

Die Voraussetzung, daß der Phasenraum X endliche Dimension hat, wird benötigt, um die Stetigkeit der Abbildung aus (3.2.7 a) zu sichern. Für unendlich-dimensionalen Phasenraum könnte man nur auf Oberhalbstetigkeit dieser Abbildung schließen, für diese Situation sind jedoch bislang keine dem hier verwendeten Selektionssatz entsprechenden Ergebnisse bekannt. Auch in neueren Arbeiten als der hier zitierten von CASTAING [1969] (siehe z.B. CASTAING [1970], BIDAULT [1972], FAKHOURY [1975]) findet man allenfalls Abschwächungen der Voraussetzungen an die beteiligten Räume.

§3 Herleitung eines Maximumprinzips

Wir beginnen mit einer Variationsungleichung für ein Optimierungsproblem von extrem einfacher Struktur, die jedoch genau der unseres Problems (RP.T) entspricht.

(3.3.1)

Gegeben seien zwei lokalkonvexe Räume E und F , eine Funktion $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, die in jedem Punkt $a_0 \in E$ in jeder Richtung $a \in E$ eine Richtungsableitung $D^+f^{\circ}(a_0)(a)$ besitzt, und eine stetige, lineare Abbildung $l : E \rightarrow F$.

(3.3.2) Lemma

Sei $a_0 \in E$ eine Lösung des Optimierungsproblems (OP):

Minimiere $f(a)$ unter der
Nebenbedingung $l(a) = b_0$.

Dann gilt für alle $a \in \text{Ker } l$

$$D^+f(a_0)(a) \geq 0 \text{ .}$$

Beweis: klar **

(3.3.3)

Das in (1.1.8) formulierte Relaxed Control Problem (RP.T) erweist sich als ein Optimierungsproblem genau dieser Struktur, wenn man setzt:

$$\begin{aligned} E &:= C[T, X] \times L_1[T, X] \text{ ,} \\ F &:= C[T, X] \text{ .} \end{aligned}$$

Zielfunktion ist die durch (1.1.8 a) definierte Abbildung F° , deren Richtungsableitung wir im vorgehenden Paragraphen untersucht haben. Die lineare Nebenbedingung wird beschrieben durch den Operator

$$l : C[T, X] \times L_1[T, X] \rightarrow C[T, X] \text{ ,}$$

der jedem Element $(\underline{x}, \underline{y}) \in C \times L_1$ die durch

$$(t \rightarrow \underline{x}(t) - \int_{t_0}^t \underline{y}(s) ds)$$

definierte Funktion aus C zuordnet . Die Nebenbedingung hat dann die Form

$$l(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{b}_0 \text{ ,}$$

wobei b_0 die durch den Anfangswert $x_0 \in X$ bestimmte konstante Funktion aus $C[T, X]$ ist.

(3.3.4)

Seien nun $(\underline{x}_0, \underline{y}_0) \in C \times L_1$ eine Lösung des Problems (RP.T), dann setzen wir

$$\begin{aligned} L &:= \text{Ker } l \\ &= \{(\underline{x}, \underline{y}) \in C \times L_1 \mid \wedge t \in T \quad x(t) = \int_{t_0}^t y(s) ds\} , \\ A^- &:= \{(\underline{x}, \underline{y}) \in C \times L_1 \mid D^+ F^\circ(\underline{x}_0, \underline{y}_0)(\underline{x}, \underline{y}) < 0\} . \end{aligned}$$

A^- ist die Menge der "Abstiegsrichtungen" des Funktionals F° im Punkt $(\underline{x}_0, \underline{y}_0) \in C \times L_1$. Die Variationsungleichung aus Lemma (3.3.2) läßt sich mit diesen Bezeichnungen auf die folgende Weise formulieren:

$$A^- \cap L = \emptyset .$$

Aus der in Folgerung (3.2.8) enthaltenen Information über $D^+ F^\circ(\underline{x}_0, \underline{y}_0)(\underline{x}, \underline{y})$ ergibt sich, daß A^- als Teilmenge von $C \times L_1$ eine Vereinigung von abgeschlossenen konvexen Kegeln ist. Um diese Tatsache zur Herleitung eines Maximumprinzips ausnützen zu können, müssen wir an die Lösung $(\underline{x}_0, \underline{y}_0)$ von (RP.T) zusätzliche Regularitätsforderungen stellen, die den bei gewöhnlichen Kontrollproblemen in diesem Zusammenhang benötigten entsprechen. (Man vergleiche etwa GIRSANOV [1972] ŠENIČNYI [1972] oder HALKIN [1970].)

(3.3.5) Voraussetzung

Die Menge A^- der Abstiegsrichtungen des Funktionals F° im Lösungspunkt $(\underline{x}_0, \underline{y}_0)$ ist konvex und enthält innere Punkte.

Daß wir hier eine Voraussetzung dieser Art benötigen, ist nicht verwunderlich. HALKIN [1966] stellt in diesem Zusammenhang fest: "Das Maximumprinzip ist die wichtigste notwendige Bedingung in der Kontrolltheorie: Sie charakterisiert die Trennung gewisser konvexer Mengen. Es gibt keine Hoffnung, dieses Ergebnis jemals mit irgendeiner Methode abzuleiten, die nicht, direkt oder indirekt, den Begriff der konvexen Mengen und ihrer Trennung verwendet."

(3.3.6)

Wegen $A^- \cap L = \emptyset$ ist A^- eine echte Teilmenge von $C \times L_1$. Aufgrund von (3.3.5) ist dann L eine Stützmannigfaltigkeit an den abgeschlossenen konvexen Kegel $A := \text{cl } A^-$, und es gilt $L + A \neq C \times L_1$. Nach IOFFE-TICHOMIROV [1968] gilt deshalb im Raum $(C \times L_1)'$

$$\{0\} \neq (L + A)^\circ = L \cap A^\circ.$$

Diese Beziehung entspricht einer nichttrivialen Eulerschen Gleichung.

(3.3.7)

Das gewünschte Maximumprinzip gewinnen wir aus der Untersuchung der Menge A° . Alle dabei verwendeten Tatsachen über Polarenbildung finden sich in der Arbeit von IOFFE-TICHOMIROV [1968] im Abschnitt "Polarity".

Wir bezeichnen mit $(-\hat{H}_1(\underline{z}^*, \underline{m}), \underline{z}^*)$ das durch

$$((\underline{x}, \underline{y}) \rightarrow \int_T [\langle \underline{z}^*(t), \underline{y}(t) \rangle + \langle -\hat{H}_1(t, \underline{x}_0, \underline{z}^*, \underline{m}), \underline{x} \rangle] dt)$$

definierte Funktional aus $(C \times L_1)'$. Damit ergibt sich

aus Folgerung (3.2.8) die folgende Darstellung für die Menge A^- :

$$A^- = \bigcup_{\underline{m} \in N} \bigcap_{\underline{z}^* \in D} H^-((- \hat{H}_1(\underline{z}^*, \underline{m}), \underline{z}^*)) .$$

(Die hier verwendete Bezeichnungsweise für die durch ein lineares Funktional gegebenen Halbräume wurde in (1.2.15 b) eingeführt). Da die Mengen A^- und $A = \text{cl } A^-$ die gleiche Polare haben, und da ferner gilt:

$$A' := \bigcup_{\underline{m} \in N} \bigcap_{\underline{z}^* \in D} H^-[(- \hat{H}_1(\underline{z}^*, \underline{m}), \underline{z}^*)] \subset A ,$$

betrachten wir zunächst die Menge A' :

$$\begin{aligned} A' &= \bigcup_{\underline{m} \in N} \bigcap_{\underline{z}^* \in D} \{ \lambda \cdot (- \hat{H}_1(\underline{z}^*, \underline{m}), \underline{z}^*) \mid \lambda \geq 0 \}^\circ \\ &= \bigcup_{\underline{m} \in N} \left(\bigcap_{\underline{z}^* \in D} \{ \lambda \cdot (- \hat{H}_1(\underline{z}^*, \underline{m}), \underline{z}^*) \mid \lambda \geq 0 \} \right)^\circ . \end{aligned}$$

Da $A^- \subset A' \subset A = \text{cl } A^-$ ist, gilt $A = \text{cl } A' = A'^{\circ\circ}$, und man kann weiter umformen:

$$\begin{aligned} A^\circ &= (A'^{\circ\circ})^\circ = A'^\circ \\ &= \bigcup_{\underline{m} \in N} \left(\bigcup_{\underline{z}^* \in D} \{ \lambda \cdot (- \hat{H}_1(\underline{z}^*, \underline{m}), \underline{z}^*) \mid \lambda \geq 0 \} \right)^\circ \\ &= \bigcap_{\underline{m} \in N} \left(\bigcup_{\underline{z}^* \in D} \{ \lambda \cdot (- \hat{H}_1(\underline{z}^*, \underline{m}), \underline{z}^*) \mid \lambda \geq 0 \} \right)^{\circ\circ} \\ &= \bigcap_{\underline{m} \in N} \left(\bigcup_{\lambda \geq 0} \{ \lambda \cdot (- \hat{H}_1(\underline{z}^*, \underline{m}), \underline{z}^*) \mid \underline{z}^* \in D \} \right)^{\circ\circ} \\ &= \bigcap_{\underline{m} \in N} \left(\bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda \cdot \{ (- \hat{H}_1(\underline{z}^*, \underline{m}), \underline{z}^*) \mid \underline{z}^* \in D \} \right) . \end{aligned}$$

Die letzte dieser Gleichheitsbeziehungen beruht auf den folgenden Tatsachen:

(3.3.8)

Aufgrund der Überlegungen in (3.2.2) ist die meßbare Korrespondenz

$$(t \rightarrow \partial f^\circ(t, \underline{x}_0, \underline{y}_0)) : T \rightarrow X'$$

kompakt- und konvexwertig. Daher ist nach CASTAING [1969, th. 8.7] die Menge D , aufgefaßt als Teilmenge von $L_\infty[T, X]$ konvex und $\sigma(L_\infty, L_1)$ -kompakt. Faßt man D als Teilmenge von $L_1[T, X']$ auf, so läßt sich D als $\sigma(L_1, L_\infty)$ -kompakte Menge nachweisen (CASTAING [1968/69]). Im Raum $L_1[T, X']$ ist dann auch die Menge $HD := \{-\hat{H}_1(\underline{z}^*, \underline{m}) \mid \underline{z}^* \in D\}$ konvex und $\sigma(L_1, L)$ -kompakt. Nach IOFFE-LEVIN [1972, Anhang 1] läßt der Dualraum von $C[T, X]$ eine Zerlegung in eine topologisch direkte Summe $L_1[T, X'] \oplus Z$ zu. (Z ist dabei der Teilraum der singulären Funktionale). Da $C[T, X] \subset L_1[T, X]$, ist die Einschränkung der Topologie $\sigma(C', C)$ auf $L_1[T, X']$ gröber als $\sigma(L_1, L_\infty)$. Daher ist HD als Teilmenge von $L_1[T, X']$ auch kompakt bezüglich der Einschränkung von $\sigma(C', C)$. Da ferner die Menge $HD \times D$ wegen (3.3.5) das Nullfunktional nicht enthält, ist die Menge

$$\bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda \cdot \{-\hat{H}_1(\underline{z}^*, \underline{m}), \underline{z}^*\} \mid \underline{z}^* \in D\}$$

der konvexe abgeschlossene Projektionskegel von $(HD) \times D$ in C' (und ist sogar enthalten in dem abgeschlossenen Teilraum $L_1 \times L_\infty$, versehen mit der Topologie $\sigma(C', C) \times \sigma(L_\infty, L_1)$), und daher gleich seiner Bipolaren.

(3.3.9)

Wir betrachten nun ein von Null verschiedenes Element aus $L \cap A^\circ$. Für ein fest gewähltes $\underline{m} \in N$ läßt es sich dann darstellen in der Form $\lambda_0 \cdot (-\hat{H}_1(\underline{z}^*, \underline{m}), \underline{z}^*)$ mit $\underline{z}^* \in D$ und $\lambda_0 > 0$. Wir benötigen nun die "übliche Hamiltonfunktion"

$$H : T \times X \times X' \times U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ,$$

definiert durch

$$(a) \quad H(t, x, z^*, u, \lambda) := \langle z^*, G(t, x, u) \rangle - \lambda g(t, x, u) .$$

Ihre partielle Ableitung nach $x \in X$ bezeichnen wir mit H_x . Wie bisher kennzeichnen wir die Erweiterung einer auf U_0 definierten Funktion auf die Mengen $M_1^+(U_0)$ durch " $\wedge$ ". Für alle $(\underline{x}, \underline{y}) \in L$ gilt dann:

$$(b) \quad 0 = \int_T [\langle \lambda_0, z^*(t), y(t) \rangle + \langle -\lambda_0, \hat{H}_x(t, \underline{x}_0, \underline{z}^*, \underline{m}, 1), \underline{x} \rangle] dt .$$

Setzt man $\underline{z}_0^* := \lambda_0 \cdot \underline{z}^*$, so ergibt sich aus der Definition von H :

$$(c) \quad 0 = \int_T [\langle \underline{z}_0^*(t), y(t) \rangle + \langle -\hat{H}_x(t, \underline{x}_0(t), \underline{z}_0^*(t), \underline{m}(t), \lambda_0), \underline{x}(t) \rangle] dt .$$

Nach Definition von L gilt für $(\underline{x}, \underline{y}) \in L$

$$\wedge t \in T \quad \underline{x}(t) = \int_{t_0}^t \underline{y}(s) ds .$$

Partielle Integration des zweiten Terms von (3.3.9 b) liefert damit für alle $\underline{y} \in L_1[T, X]$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_T [\langle \underline{z}_0^*(t), y(t) \rangle \\ &- \langle \int_{t_0}^t -\hat{H}_x(s, \underline{x}_0(s), \underline{z}_0^*(s), \underline{m}(s), \lambda_0) ds, y(t) \rangle] dt \\ &+ \langle \int_T -\hat{H}_x(t, \underline{x}_0(t), \underline{z}_0^*(t), \underline{m}(t), \lambda_0) dt, \int_T y(t) dt \rangle . \end{aligned}$$

Um aus dieser Beziehung eine Differentialgleichung für $\underline{z}^*$ zu erhalten, betrachten wir die Funktion

$$z(t) := z_0^*(t) - \int_{t_0}^t \hat{H}_x(s, x_0(s), z_0^*(s), m(s), \lambda_0) ds .$$

Wir erhalten für alle $y \in L_1[T, X]$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_T \langle z(t), y(t) \rangle dt - \langle z(t_1) - z_0^*(t_1), \int_T y(t) dt \rangle \\ &= \int_T \langle z(t) - z(t_1) - z_0^*(t_1), y(t) \rangle dt , \end{aligned}$$

woraus für fast alle $t \in T$ folgt

$$(d) \quad z(t) - z(t_1) - z_0^*(t_1) = 0 .$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned} 0 &= z_0^*(t) - \int_{t_0}^t \hat{H}_x(s, x_0(s), z_0^*(s), m(s), \lambda_0) ds \\ &\quad - z_0^*(t_1) + \int_{t_1}^t \hat{H}_x(t, x_0(t), z_0^*(t), m(t), \lambda_0) dt + z_0^*(t_1) \\ &= z_0^*(t) + \int_{t_1}^t \hat{H}_x(s, x_0(s), z_0^*(s), m(s), \lambda_0) ds \quad \text{f.ü.}, \end{aligned}$$

also ist z_0^* absolut stetig und genügt fast überall der Differentialgleichung

$$(e) \quad \dot{z}_0^*(t) = -\hat{H}_x(t, x_0(t), z_0^*(t), m(t), \lambda_0) .$$

Daher gilt (d) für alle $t \in T$ und man erhält für $t := t_1$ die Anfangsbedingung

$$z_0^*(t_1) = 0$$

für die adjungierte Gleichung (e) .

(3.3.10)

Die Maximumbedingung ergibt sich ganz einfach aus Satz (1.2.21) . Da für fast alle $t \in T$ gilt

$$z^*(t) \in \partial f^\circ(t, \underline{x}_0, \underline{y}_0) ,$$

erhält man

$$\begin{aligned} & \max_{u \in U(t)} \{ \langle z^*(t), G(t, x_0(t), u) \rangle - g(t, x_0(t), u) \} \\ & = \langle z^*(t), \hat{G}(t, x_0(t), m(t)) \rangle - \hat{g}(t, x_0(t), m(t)) . \end{aligned}$$

Multiplikation mit λ_0 unter Beachtung von $\underline{z}_0^* = \lambda_0 \cdot \underline{z}^*$ liefert dann insgesamt die gewünschte Aussage.

(3.3.11) Maximumprinzip

Die Lösung $(\underline{x}_0, \underline{y}_0) \in C[T, X] \times L_1[T, X]$ des Problems (RP.T) erfülle alle Regularitätsvoraussetzungen. Dann existieren Funktionen $\underline{z}_0^* : T \rightarrow X'$, $\underline{m} : T \rightarrow M_1^+(U_0)$ und $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+$ (λ_0 und $\underline{z}_0^*$ nicht zugleich Null), so daß gilt:

$$\begin{aligned} & z_0^*(t) = - \cdot \int_{U_0} [D_x G(t, x_0(t), u) * z_0^*(t)] m(t)(du) \\ (a) \quad & + \lambda_0 \int_{U_0} D_x g(t, x_0(t), u) m(t)(du) , \quad f.u \\ & z_0^*(t_1) = 0 , \end{aligned}$$

(adjungierte Gleichung)

$$\begin{aligned} & \max_{u \in U(t)} \{ \langle z_0^*(t), G(t, x_0(t), u) \rangle - \lambda_0 g(t, x_0(t), u) \} \\ (b) \quad & = \int_{U_0} [\langle z_0^*(t), G(t, x_0(t), u) \rangle - \lambda_0 g(t, x_0(t), u)] m(t)(du) \\ & \text{für fast alle } t \in T . \end{aligned}$$

(Maximumbedingung)

Bemerkung

Aufgrund der in der Konstruktion von (RP.T) durchgeführten

Konvexifizierung gewinnen wir direkt ein globales Maximumprinzip, im Gegensatz zur Situation beim Beweis des Maximumprinzips für gewöhnliche Kontrollprobleme der Form (OC) , wie er z.B. bei GIRSANOV geführt wird.

Literatur

- BERKOVITZ, L. D. [1974]: Optimal Control Theory.
Applied Mathematical Sciences, Vol. 12.
Springer Verlag, New York - Heidelberg - Berlin, 1974.
- BIDAULT, M.-F. [1972]: Quelques résultats d'existence pour
des problèmes de contrôle optimale.
C. R. Acad. Sci. Paris 274, 1972, 62 - 65.
- BOLTYANSKII, V. G. [1973]: Optimale Steuerung diskreter
Systeme (russisch). Verlag "Nauka", Moskau, 1973.
- BOURBAKI, N. [1965]: Intégration. Chap. I - IV.
Verlag Hermann, Paris, 1965².
- [1966]: Espaces vectoriels topologiques.
Chap. I - II. Verlag Hermann, Paris, 1966².
- BROSOWSKI, B. und HOFFMANN, K.-H. [1974]: Eine Variations-
ungleichung und Anwendungen. Numer. Math. 22, 1974,
137 - 147.
- BROSOWSKI, B. und WEGMANN, R. [1973]: On the lower semi -
continuity of the set-valued metric-projection.
J. Approximation Theory 8, 1, 1973, 84 - 100.
- BULIRSCH, R. [1971]: Die Mehrzielmethode zur numerischen
Lösung von nichtlinearen Randwertproblemen und Auf-
gaben der optimalen Steuerung. Vortrag im Lehrgang
"Flugbahnoptimierung" der Carl Cranz Gesellschaft,
1971.

- CASTAING, C. [1968/69]: Un théorème de compacité faible dans L^1_E . Applications. Université de Montpellier, Secrétariat de Mathématiques. Publication No. 44.
- CASTAING, C. [1969]: Sur les multiapplications mesurables. These, Faculté des Sciences, Caen, 1969.
- CASTAING, C. [1970]: Une nouvelle extension du théorème de Dragoni - Scorza. C. R. Acad. Sci. Paris 271, 1970, 396 - 398.
- CESARI, L. [1965]: An existence theorem in problems of optimal control. SIAM J. Control 3,1, 1965, 7 - 22.
- CITRON, S. J. [1969]: Elements of Optimal Control. Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1969.
- CHOQUET, G. Lectures on Analysis. Benjamin, New York, 1969
- DEM'YANOV, V. F. [1968]: Differentiation of the Maximin-function. USSR Computational Math. and Math. Phys. 8,6, 1968, 1 - 15.
- [1969]: Differentiation of the Maximin-function II. USSR Computational Math. and Math. Phys. 9,6, 1969, 69 - 87.
- [1970]: Differentiation of the Maximin-function III. USSR Computational Math. and Math. Phys. 10,1, 1970, 31 - 48.
- [1974]: Minimax: Richtungs-differenzierbarkeit. Verlag der Leningrader Universität, 1974 (russisch).

DEM'YANOV, V. F. und MALOZEMOV, V. N. [1971]: On the theory of non-linear minimax problems. Russian Math. Surveys 26,3, 1971, 57 - 115.

DEM'YANOV, V. F. und RUBINOV, A. M. [1966]: Über notwendige Bedingungen für ein Minimum. Ekonom. i Mat. Metody 2, 1966, 406 - 417 (russisch).

DIEROLF, P. [1973]: Korrespondenzen und ihre topologischen Eigenschaften. Überblicke Mathematik, Band 6, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1973

FAKHOURY, H. [1975]: Selections continues dans les espaces uniformes. C. R. Acad. Sci. Paris, 280, 1975, 213 - 216.

FILIPPOV, A. F. [1962]: On certain questions in the theory of optimal control. SIAM J. Control, 1, 1962, 76 - 84.

——— [1971]: The existence of solutions of generalized differential equations. Math. Notes 10, 1971, 608 - 611.

GAMKRELIDZE, R. V. [1962]: Optimal sliding states. Soviet Math. Dokl. 3, 1962, 559 - 562.

GIRSANOV, I. V. [1972]: Lectures on Mathematical Theory of Extremum Problems. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer Verlag, Berlin, 1972.

HALKIN, H. [1970]: A satisfactory treatment of equality and operator constraints in the Dubovitskii - Milyutin optimization formalism. J. Optimization Theory Appl. 6,2, 1970, 138 - 149.

HALKIN, H. [1966]: Referat des Buches "E. S. DREXFUS, Dynamic Programming and the Calculus of Variations, Academic Press, New York, 1965". SIAM Rev. 8, 1966, 547 - 549.

HILLE, E. und PHILLIPS, R. S. [1957]: Functional Analysis and Semi-Groups. Colloquium Publications, vol. XXXI, American Mathematical Society, Providence, R. I., 1957

- HILDENBRAND, W. [1967]: Über stetige Korrespondenzen. In: "Operations Research Verfahren, Methods of Operations Research III", Ed. A. Hain, Verlag Anton Hain, Meisenheim am Glan, 1967, 234 - 248.
- HOFFMANN, K.-H. [1968]: Über nichtlineare Tschebyscheff - Approximation mit Nebenbedingungen. Dissertation, München, 1968
- HOFFMANN, K.-H. [1971]: Nichtlineare Optimierung. Habilitationsschrift, München, 1971.
- IOFFE, A. D. und LEVIN, V. L. [1972]: Subdifferentials of convex functions. Trans. Moscow Math. Soc. 26, 1972, 1 - 72.
- IOFFE, A. D. und TICHOMIROV, V. M. [1968]: Duality of convex functions and extremum problems. Russian Math. Surveys 23,6, 1968, 53 - 124.
- KÜTHE, G. [1966]: Topologische lineare Räume I. Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften, Band 107, Springer Verlag, Berlin, 1966².
- KROTOV, V. F. [1961]: Über die optimale Steuerung des horizontalen Fluges eines Flugzeuges. Coll.: Trans. MVTU, Mechanics, 104, Oborongiz (1961), 54 - 65 (russisch).
- KROTOV, V. F. und BROVMAN, M. Ya. [1962]: Extremale Prozesse bei der plastischen Deformation von Metallen. Izv. Akad. Nauk SSSR, Otd. tehn. n., Mehanika i Masino-stroenie, 3, 1962, 148 - 153. (russisch).
- KROTOV, V. F. und GURMAN, V. I. [1973]: Methoden und Aufgaben der optimalen Steuerung. Verlag "Nauka", Moskau, 1973 (russisch).

- KRYLOV, I. A. und ČERNUSKO, F. L. [1972]: An algorithm for the method of successive approximations in optimal control problems. USSR Computational Math. and Math. Phys. 12,1, 1972, 15 - 38.
- KURATOWSKI, K. [1966]: Topology.
Academic Press, New York und PWN, Warschau, 1966.
- LEE, E. B. und MARKUS, L. [1967]: Foundations of Optimal Control Theory. John Wiley, New York, 1967.
- LEVIN, V. L. [1968]: Bedingungen für Extrema in unendlich-dimensionalen, linearen Aufgaben mit Operator - Einschränkungen. In: "Studien in mathematischer Programmierung", Verlag "Nauka", Moskau, 1968, 159 - 197 (russisch).
- LJAPUNOV, A. A. [1940]: Über vollständig additive Vektorfunktionen. Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Matem. 4,6, 1940, 465 - 478.
- MIELE, A. und IYER, R. R. [1970]: General technique for solving nonlinear two-point boundary-value problems via the method of particular solutions. J. Optimization Theory Appl. 5,5, 1970,
- MOREAU, J. J. [1966/67]: Fonctionnelles convexes.
College de France, 1966-1967.
- PEVNYI, A. B. [1971]: Differentiation of a maximin - function. USSR Computational Math. and Math. Phys. 11,2, 1971, 253 - 259.
- PONTRJAGIN, L. S., BOLTJANSKII, V. G., GAMKRELIDZE, R. V. und MIŠČENKO, E. F. [1964]: Mathematische Theorie optimaler Prozesse. Oldenbourg Verlag, München, 1964.

- PŠENIČNYI, B. N. [1972]: Notwendige Optimalitätsbedingungen. Oldenbourg Verlag, München, 1972.
- SCHWARTZ, L. [1973]: Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures. Oxford University Press, London, 1973.
- SION, M. [1958]: On general minimax theorems. Pacific Math. 8, 1958, 171 - 176.
- WARGA, J. [1962] Relaxed variational problems. J. Math. Anal. Appl. 4, 1962, 111 - 128.
- WARGA, J. [1972]: Optimal Control of Differential and Functional Equations. Academic Press, New York, 1972.
- WEGMANN, R. [1970]: Der Wertebereich von Vektorintegralen. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 14, 1970, 203 - 238.

L E B E N S L A U F

Persönliche Daten

Ich wurde am 26.7. 1943 in Innsbruck geboren; meine Eltern sind Otto Ludwig Weber und seine Ehefrau Herta, geb. Stumfohl. Seit dem 8.10.1971 bin ich verheiratet mit Renate Katharina Weber, geb. Stocker.

Ich bin deutscher und österreichischer Staatsangehöriger.

Schulbildung

1950 - 1954 Volksschule in Mühlheim/Ruhr

1954 - 1958 Staatliches Gymnasium in Mühlheim/Ruhr,
altsprachlicher Zweig

1958 - 1963 Theresiengymnasium in München

Sommer 1963 Abitur

Studium

WS 1963/64 - SS 1966 Universität München

WS 1966/67 - SS 1967 Universität Paris

WS 1967/68 - SS 1969 Universität München

Juli 1969 Diplomprüfung in Mathematik

Berufstätigkeit

1.10.1969 - 14.9.1971 Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle am Lehrstuhl für Numerische und Angewandte Mathematik der Universität Göttingen bei Prof. Dr. B. Brosowski.

15.9.1971 bis jetzt Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle am Lehrstuhl von Prof. Dr. G. Hämmerlin am Mathematischen Institut der Universität München

